線形代数 1A
第 7 回　講義資料

担当：山中

1. 注意事項

2. 行列式

この講義の実施方法について説明します.

- この講義はオンライン授業です. 自己学習型の実施方法で進めます.
- 具体的には, 講義資料を教員の Web ページから取得し, 講義資料を読み進めることで学習を行ってください.
    - 教員 Web ページの URL: `http://www.gem.aoyama.ac.jp/~syamanaka/index.html`
    - 講義当日の朝までに資料をアップロードします.
- 成績評価はレポートによって行います.
    - 詳細は後日にアナウンスします. 3 回程度に分けて出題する予定です.
    - 注：講義資料内の [問] はレポート課題ではありません.

1 注意事項

2 行列式

はじめに

- 前回まで，掃き出し法による連立 1 次方程式の解法をみてきました．
- では，連立一次方程式の解の公式はどのように与えられるでしょうか．
- そのために，今回は行列式という概念を導入します．

2 次正方行列の行列式

- 2 変数の連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の解法を振り返る.
- $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ならば,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  となり，解が求まる.
- 上に現れている $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式という.

2 次正方行列の行列式

2 次正方行列の行列式

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して，$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ を行列 A の行列式と呼び，$|A|$，$\det A$, または $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ と書く．

- 2 変数の連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の解は

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

  と表される（クラーメルの公式）

3 次正方行列の行列式

- 3 変数の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

を以下のように解いてみる．
- 第 1 式 $\times\, a_{23}$ − 第 2 式 $\times\, a_{13}$ を計算して x_3 を消去すると，

$$(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})x_2 = b_1a_{23} - b_2a_{13}$$

を得る．また，第 1 式 $\times\, a_{33}$ − 第 3 式 $\times\, a_{13}$ を計算して x_3 を消去すると，

$$(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_1 + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})x_2 = b_1a_{33} - b_3a_{13}$$

を得る．
- この 2 つの式から x_2 を消去すると，

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13})x_1 \\ &= (b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13}) \end{aligned}$$

を得る．

3 次正方行列の行列式

- 同様にして
  $(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13})x_2$
  $=(a_{11}b_2a_{33}+a_{21}b_3a_{13}+a_{31}b_1a_{23}-a_{11}b_3a_{23}-a_{21}b_1a_{33}-a_{31}b_2a_{13})$
  と
  $(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13})x_3$
  $=(a_{11}a_{22}b_3+a_{21}a_{32}b_1+a_{31}a_{12}b_2-a_{11}a_{32}b_2-a_{21}a_{12}b_3-a_{31}a_{22}b_1)$
  を得る.
- 上の式に現れた
  $(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13})$
  を行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式という.

3 次正方行列の行列式

3 次正方行列の行列式

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して，

$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13})$ を行列 A の行列式と呼び，$|A|$，$\det A$，または $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ と書く．

- 3 変数の連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の解は

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

と表される（クラーメルの公式）

- ここまで，2 次と 3 次の場合の行列式を定義し，連立 1 次方程式の解の公式（クラーメルの公式）を与えました．
- 次に一般の n 次の場合の行列式を定義するために，置換という概念を導入します．

置換

- n 個の文字 $M_n = \{1, 2, ,\cdots, n\}$ から自分自身への全単射（1 対 1 の写像）$\sigma : M_n \to M_n$ を M_n の置換という．M_n の置換全体からなる集合を S_n と表す．
- 置換 σ が，$1 \to \sigma(1) = i_1$，$2 \to \sigma(2) = i_2$，$\ldots, n \to \sigma(n) = i_n$ という写像のときに σ を
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$
あるいは
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
と表す
  - 下の数字が上の数字の行き先を表している
  - 上下の組み合わせが変わらない限り，並べ方を変えても構わない
  - 動かない文字は省略してもよい
  - 例）
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

置換の積

- M_n の置換 σ, τ の合成写像 $\tau \circ \sigma$ を考える.
  - $\tau \circ \sigma$ も M_n の置換になる.
  - $\tau \circ \sigma$ による文字の行き先は,
    $1 \to \tau(\sigma(1))$, $2 \to \tau(\sigma(2))$, $\cdots$, $n \to \tau(\sigma(n))$ となる.
- $\tau \circ \sigma$ を τ, σ の積といい, 簡潔に $\tau\sigma$ と表す.
- 例：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

となる.

単位置換，逆置換

- 全ての文字を動かさない置換を単位置換といい，ϵ で表す．
$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$
- 置換
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
に対して
$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$
を σ の逆置換という．
- $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \epsilon$ が成り立つ．

巡回置換

- $M_n = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ のうち $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m$ 意外は動かさないで $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m$ のみを $i_1 \to i_2,\ i_2 \to i_3,\ \ldots,\ i_m \to i_1$ と順にずらす置換
$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & i_{m+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & i_{m+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$
を巡回置換といい,
$$\sigma = (i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_m)$$
とかく
- 例：
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
は $\sigma = (1 \quad 5 \quad 2)$ である.

巡回置換

定理

任意の置換は，共通の文字を含まないいくつかの巡回置換の積として，積の順序を除いて一意に表わされる．

（証明）
置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に関して文字 $m \in M_n$ を一つ選び，m が σ によって移っていく先を $m \to j_1$，$j_1 \to j_2$，$j_2 \to j_3, \ldots$ と追うことにする．M_n は有限の集合であることから，$m \to j_1$，$j_1 \to j_2$，$j_2 \to j_3, \ldots$ の過程でいつかは同じ文字が現れる．そこで，m からスタートして ℓ 回目に初めて同じ文字が現れたとする．それを j_k とすれば，$j_{\ell-1} \to j_k$ である．一方で $j_{k-1} \to j_k$ である．いま，j_k が m でないとすると σ が一対一の写像であることに反するため，$j_k = m$ となる．これは，
$m \to j_1, j_1 \to j_2, j_2 \to j_3, \ldots$ が巡回置換になることを意味する．このように，巡回置換 $(m \ j_1 \ j_2 \ \ldots \ j_{k-1})$ が得られた．得られた巡回置換に含まれない文字を新たに選び，同様に考えることで，また巡回置換が得られる．これを繰り返せば，所与の置換が巡回置換の積に表される．

巡回置換

- 例：

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 9 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

について，1 の移る先を追っていくと $1 \to 3,\ 3 \to 4,\ 4 \to 5,\ 5 \to 1$ となっているので，巡回置換 $(1\ 3\ 4\ 5\ )$ を得る．これに含まれない 2 の移り先を追えば，$(2\ 7\ 8)$ を得る．最後に，$(6\ 9)$ を得る．これらから，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 1 & 9 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 5\ )(2\ 7\ 8)(6\ 9)$$

を得る．

互換

- 巡回置換のうち，特に 2 文字の巡回置換 $(i_1 \quad i_2)$ を互換という．
- 任意の置換は互換の積として表される．
  - $$\begin{aligned}(i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad \cdots \quad i_m) &= (i_1 \quad i_3 \quad \cdots \quad i_m)(i_1 \quad i_2) \\ &= (i_1 \quad i_4 \quad \cdots \quad i_m)(i_1 \quad i_3)(i_1 \quad i_2) \\ &= \cdots\end{aligned}$$

    と繰り返していけば，

    $$(i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad \cdots \quad i_m) = (i_1 \quad i_m)(i_1 \quad i_{m-1})\cdots(i_1 \quad i_2)$$

    を得る
  - 例：$(1 \quad 3 \quad 4 \quad 5) = (1 \quad 5)(1 \quad 4)(1 \quad 3)$

定理

任意の置換は互換の積で表される．

置換の符号

- 置換 σ が m 個の互換の積で表されるとき，
$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^m$$
を σ の符号という．
- （注意）置換を互換の積として表す表し方は必ずしも一意ではない．しかし，置換の符号は互換の積の表し方によらず一意に定まる．そのことを，次に確認していく．

置換の符号の一意性ついて：置換による多項式の変換

- n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と置換 $\sigma \in S_n$ が与えられたとき，P の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$ で置き換えて得られる多項式を置換 σ による多項式 P の変換といい，σP で表わす．

$$\sigma P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

- また，置換 σ, τ に対して

$$\tau(\sigma P) = (\tau\sigma)P$$

  が成り立つ．

- 例：$\sigma = (1\ 2\ 3)$, $\tau = (1\ 3)$, $P(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_2 + 3x_3$ のとき，$\sigma P = x_2x_3 + 2x_3 + 3x_1$, $(\tau\sigma)P = x_2x_1 + 2x_1 + 3x_3$

置換の符号の一意性ついて：差積

- 次の多項式 Δ は差積と呼ばれる

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j) \\
&= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots\cdots(x_1 - x_n) \\
&\qquad \times (x_2 - x_3)\cdots\cdots(x_2 - x_n) \\
&\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad \times (x_{n-1} - x_n)
\end{aligned}
$$

- 例：$n = 4$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\Delta = (x_1 - x_2)&(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \\
&\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \\
&\qquad \times (x_3 - x_4)
\end{aligned}
$$

置換の符号の一意性ついて

補題

$\sigma \in S_n$ が互換であるならば，$\sigma\Delta = -\Delta$ である．

（証明）
$\sigma = (i \quad j)$ $(i < j)$ とする．Δ の因数のうち，x_i あるいは x_j を含まないものは σ による変換を施しても変わらない．また，$(x_1 - x_i), (x_2 - x_i), \cdots, (x_{i-1} - x_i)$ と $(x_1 - x_j), (x_2 - x_j), \cdots, (x_{i-1} - x_j)$，および，$(x_i - x_{j+1}), (x_i - x_{j+2}), \cdots, (x_i - x_n)$ と $(x_j - x_{j+1}), (x_j - x_{j+2}), \cdots, (x_j - x_n)$ は σ による変換によって互いに移りあう．
σ による変換によって $(x_i - x_{i+1}), (x_i - x_{i+2}), \cdots, (x_i - x_{j-1})$ は $(x_j - x_{i+1}), (x_j - x_{i+2}), \cdots, (x_j - x_{j-1})$ に移り，$(x_j - x_{i+1}), (x_j - x_{i+2}), \cdots, (x_j - x_{j-1})$ は $(x_i - x_{i+1}), (x_i - x_{i+2}), \cdots, (x_i - x_{j-1})$ に移る．このようにこれらの因子はそれぞれ (-1) 倍して互いに移っているので，符号に注目すれば変換による符号の変化が相殺されていることになる．従って，ここまで見てきた因子については符号も含めて，$\sigma\Delta$ と Δ で同じになっていることがわかる．
変換の様子を未だ確認していない因子は $(x_i - x_j)$ のみになるが，これは σ による変換によって $(x_j - x_i) = -(x_i - x_j)$ に移る．すなわち，(-1) 倍されたことになる．

以上のことから，$\sigma\Delta = -\Delta$ がわかる．

置換の符号の一意性ついて

定理

任意の置換 $\sigma \in S_n$ が互換の積として表されるとき，その互換の個数が偶数個であるか奇数個であるかは与えられた置換 σ によって定まる．

（証明）
置換 σ を互換の積として表したとき，以下のように 2 通りに表されるとする．

$$\sigma = \sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_1, \quad \sigma = \tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_1$$

このとき，前のページの補題から

$$\sigma\Delta = (\sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_1)\Delta = (\sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_2)(\sigma_1\Delta) = (\sigma_r\sigma_{r-1}\cdots\sigma_2)(-1)\Delta = \cdots = (-1)^r\Delta$$
$$\sigma\Delta = (\tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_1)\Delta = (\tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_2)(\tau_1\Delta) = (\tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_2)(-1)\Delta = \cdots = (-1)^s\Delta$$

を得る．これより $(-1)^r\Delta = (-1)^s\Delta$ なので，$(-1)^r = (-1)^s$ を得る．すなわち，r と s の偶奇は一致する．

置換の符号の一意性ついて

- 前ページの定理より，置換 σ の互換の積による表し方が複数あっても，それらはいずれも偶数個の互換の積であるか，あるいはいずれも奇数個の互換の積であるか，のどちらかであることがわかった．従って，置換に対してその符号は一意に定まることになる．
- 偶数個の互換の積として表される置換を偶置換，奇数個の互換の積として表される置換を奇置換と呼ぶ．
- 置換の符号は，偶置換に対しては $\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ となり，奇置換に対しては $\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$ となる
- 単位置換に対しては $\mathrm{sgn}(\epsilon)=1$ である．
- 例：

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&7&4&5&1&9&8&2&6\end{pmatrix}=(1\ 3\ 4\ 5\ )(2\ 7\ 8)(6\ 9)$$
$$=(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(2\ 8)(2\ 7)(6\ 9)$$

となるので，$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$.

行列式の定義

定義

n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

に対して，

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義される式を A の行列式といい，$|A|$, $\det A$，$|(a_{ij})|$，あるいは

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

などと表す．

2 次・3 次の場合の行列式

- 前ページの定義に従って，2 次正方行列の行列式を計算してみる
- 置換の全体の集合は $S_2 = \{\epsilon, \ (1\ 2)\}$ である．
- 置換の符号はそれぞれ $\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$，$\mathrm{sgn}((1\ 2)) = -1$ である．
- 前ページの行列式の定義より，

$$\begin{aligned}\det A &= \mathrm{sgn}(\epsilon)a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}((1\ 2))a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

- これは，以前に出てきた 2 次正方行列の行列式と一致する．

[問]　3 次の正方行列 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式を前ページの定義に従って求めると，$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13})$ が得られることを確認せよ．