線形代数 1A
第 10 回　講義資料

担当：山中

1. 注意事項

2. 余因子行列，正則行列とその逆行列

この講義の実施方法について説明します．

- この講義はオンライン授業です．自己学習型の実施方法で進めます．
- 具体的には，講義資料を教員の Web ページから取得し，講義資料を読み進めることで学習を行ってください．
    - 教員 Web ページの URL: `http://www.gem.aoyama.ac.jp/~syamanaka/index.html`
    - 講義当日の朝までに資料をアップロードします．
- 成績評価はレポートによって行います．
    - 3 回程度に分けて出題する予定です．
    - 注：講義資料内の [問] はレポート課題ではありません．

1. 注意事項
2. 余因子行列，正則行列とその逆行列

はじめに

- 前回は余因子を導入しました．
- 今回は，余因子を成分としてもつ行列（余因子行列）を導入し，その性質をみます．また，行列の積の行列式は行列式の積で表されることを確認します．
- そして，正方行列が正則であるための条件と逆行列を明示的に与えます

余因子行列

- n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，a_{ij} の余因子 $\tilde{a}_{ij}$ を成分とする行列

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

の転置行列

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

を A の余因子行列という．

余因子行列の性質

定理

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} |A| & & O \\ & \ddots & \\ O & & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

（略証）：行列 $A\tilde{A}$ の第 $(i,\ k)$ 成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj}$ である．ここで，前回扱った以下の定理

$$a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in} = |A| \quad (\text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開})$$

$$a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{kn} = 0 \quad (k \neq i)$$

を利用すれば，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj} = \begin{cases} |A| & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

となる．これより，

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A| & & O \\ & \ddots & \\ O & & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

を得る．同様に．$\tilde{A}A = |A|E$ がわかる．

ブロック分けされた行列の行列式

定理

r 次正方行列 A と s 次正方行列 D に対して

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

が成り立つ．

（略証）：$n = r + s$ とし，n 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} = (a_{ij})$ を考える．この行列式は

$$\det X = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r\sigma(r)} a_{r+1\sigma(r+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

である．ここで，$a_{ij} = 0\ (1 \leq i \leq r, r+1 \leq j \leq n)$ であるので，$\{\sigma(1),\ \sigma(2), \cdots, \sigma(r)\}$ の中に r より大きい数があれば

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r\sigma(r)} a_{r+1\sigma(r+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

である．よって，$\det X$ の計算において，$\sum_{\sigma}$ は $\{\sigma(1),\ \sigma(2),\ \cdots,\ \sigma(r)\} = \{1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$ となるものについてのみ考えれば良い．

(次のページに続く)

ブロック分けされた行列の行列式

このような σ は $\{\sigma(r+1), \cdots, \sigma(n)\} = \{r+1, \cdots, n\}$ を満たすので，
$\rho = \begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ \sigma(r+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ とすれば $\sigma = \tau\rho$ である．また，σ が S_n に含まれる全ての置換を順にとるとき，τ と ρ はそれぞれ S_r と S_s 上の置換を全てとる．$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\rho)$ なので，

$$\begin{aligned} \det X &= \sum_{\tau,\,\rho} \mathrm{sgn}(\tau\rho) a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)} a_{r+1\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)} \\ &= \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)} \sum_{\rho} \mathrm{sgn}(\rho) a_{r+1\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)} \\ &= |A||D| \end{aligned}$$

が成り立つ．転置の行列式を考えれば，$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$ も成り立つ．

行列の積の行列式

定理

n 次正方行列 A, B に対して

$$|AB| = |A||B|$$

が成り立つ．

（略証）：$2n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}$ の行列式を 2 通りに計算する．まず，前ページで証明した定理より

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

である．次に，$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ として，$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}$ において第 1 列に b_{1k}，第 2 列に b_{2k}，$\ldots$，第 n 列に b_{nk} をかけて加える操作を $k = 1, 2, \cdots, n$ について行うと

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix} = (-1)^n |-E||AB| = |AB|$$

以上より，$|AB| = |A||B|$.

行列が正則であることの必要十分条件，逆行列の形

定理

n 次正方行列 A が正則行列であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である．このとき，逆行列 A^{-1} は余因子行列 $\tilde{A}$ を用いて以下で与えられる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

（略証）: A が正則であれば，行列 B が存在して $AB = E$ を満たす．この行列式をとると，$|A||B| = |AB| = |E| = 1$ であるので，$|A| \neq 0$ がわかる．
逆に，$|A| \neq 0$ のとき

$$B = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

とおくと，$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$ であることから，

$$AB = A\frac{1}{|A|}\tilde{A} = \frac{1}{|A|}A\tilde{A} = \frac{1}{|A|}|A|E = E$$
$$BA = \frac{1}{|A|}\tilde{A}A = \frac{1}{|A|}\tilde{A}A = \frac{1}{|A|}|A|E = E$$

を得る．これより A が正則であること，また，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$ がわかる．

逆行列の行列式

定理

正則行列 A に対して，

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

が成り立つ

（略証）：

$$|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$$

であることから，

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

が成り立つ

例題

- 例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の余因子行列を求めると，

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6,\ \tilde{a}_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9, \tilde{a}_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\tilde{a}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ \tilde{a}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, \tilde{a}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\tilde{a}_{31} = -5,\ \tilde{a}_{32} = 4,\ \tilde{a}_{33} = -1$$

より，

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

また，$\det A = -21$ なので，逆行列は

$$A^{-1} = \frac{-1}{21} \begin{pmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$