第4章 広義積分

1 広義積分 (復習)

(1) 有界区間上の広義積分

有界区間上の広義積分

定義 1. $a < b$ とする．(1) $f(x)$ を $(a, b]$ 上の連続関数とし，$x \to a+0$ のとき $f(x)$ が発散すると仮定する．このとき，極限値

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

が存在するならば，f は $(a, b]$ 上で **(広義) 積分可能**であると言って，極限値を (通常の定積分のように) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く．

(2) $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とし，$x \to b-0$ のとき $f(x)$ が発散すると仮定する．このとき，極限値

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{a}^{b-\delta} f(x)\,dx$$

が存在するならば，f は $[a, b)$ 上で **(広義) 積分可能**であると言って，極限値を (通常の定積分のように) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く．

(3) $f(x)$ を (a, b) 上の連続関数とし，$x \to a+0, x \to b-0$ のときともに $f(x)$ が発散すると仮定する．$a < c < b$ として f が $(a, c]$ 上でも $[c, b)$ 上でも積分可能ならば，f は (a, b) 上で **(広義) 積分可能**であると言う．このとき，

広義積分の和 $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く．

いずれの場合も，広義積分が収束する，という言い方をすることがある．

広義積分の値は，定義の (1),(2) を見ると分かるように

(i) 端点の近くを外した区間上の定積分の値を求め，

(ii) 積分区間を広げる極限操作を行う，

という手順で求めることができる．

例題 1.1. 次の広義積分の値を求めよ．

$$(1)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (2)\ \int_0^2 \log x\,dx \qquad (3)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

解答例. (1) $0<\delta<1$ とすると，

$$\int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2x^{\frac{1}{2}}\Big]_{x=\delta}^1 = 2(1-\sqrt{\delta}) \to 2 \quad (\delta \to +0).$$

(2) $0<\delta<2$ とすると，

$$\int_\delta^2 \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_{x=\delta}^2 = 2\log 2 - 2 - (\delta\log\delta - \delta)$$

となる．$\delta \to +0$ のとき $\delta\log\delta \to 0$ であるから

$$\lim_{\delta\to+0}\int_\delta^2 \log x\,dx = 2\log 2 - 2.$$

(3) $0<a<b<1$ として，$\alpha,\beta \in (0,\frac{\pi}{2})$ を $\sin^2\alpha = a, \sin^2\beta = b$ によって定める．このとき，$x=\sin^2\theta$ とおいて置換積分をすると

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 2(\beta-\alpha)$$

となる．$a\to+0$ のとき $\alpha\to 0$，$b\to 1-0$ のとき $\beta\to\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \pi.$$

□

演習 1.1. 次の広義積分の値を求めよ．

$$(1)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (2)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx \quad (3)\ \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad (4)\ \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

演習 1.2. $p>0$ とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ が収束するような p の範囲とそのときの広義積分の値を求めよ．

ベータ関数

定義 2. 次の広義積分で定義される $p,q>0$ に関する 2 変数関数をベータ関数と呼び，$B(p,q)$ と書く：

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

(2) 無限区間上の広義積分

無限区間上の広義積分

定義 3. $c \in \mathbf{R}$ とする.

(1) $f(x)$ が $[c, \infty)$ 上の連続関数のとき，極限値

$$\lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

が存在するならば，f は $[c, \infty)$ 上で **(広義) 積分可能**であると言って，極限値を (通常の定積分のように) $\displaystyle\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ と書く.

(2) $f(x)$ が $(-\infty, c]$ 上の連続関数のとき，極限値

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx$$

が存在するならば，f は $(-\infty, c]$ 上で **(広義) 積分可能**であると言って，極限値を (通常の定積分のように) $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ と書く.

(3) $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上の連続関数のとき，f が $(-\infty, c]$ 上でも $[c, \infty)$ 上でも積分可能ならば，f は $\mathbf{R}$ 上で **(広義) 積分可能**であると言う．このとき，

$$\text{広義積分の和}\quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx \ \text{を}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \ \text{と書く.}$$

(3) において，$\mathbf{R}$ 上の積分の値は c に依らない.

いずれの場合も，広義積分が収束する，という言い方をすることがある.

広義積分の値は，有界区間上の広義積分と同様に，

(i) 有界区間上の定積分の値を求め，

(ii) 積分区間を広げる極限操作を行う，

という手順で求めることができる.

f が $[c, \infty)$ 上で積分可能ならば，$f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ である．しかし，$f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ であっても f が $[c, \infty)$ とは限らない.

たとえば，$f(x) = x^{-2}$ は $[1, \infty)$ 上積分可能だが，$f(x) = x^{-1}$ はそうではない：

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{b} \to 1, \qquad \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \log b \to \infty \quad (b \to \infty).$$

ガンマ関数

定義 4. $p>0$ に対して次の広義積分の値を対応させる関数 $\Gamma(p)$ を**ガンマ関数**という：

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

例題 1.2. 次の広義積分の値を求めよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)(x+4)}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$

解答例. (1) 非積分関数を部分分数展開すると，$b>0$ に対して

$$\int_0^b \frac{1}{(x+2)(x+4)}\,dx=\int_0^b \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\Big)\,dx=\frac{1}{2}\Big(\log\frac{b+2}{b+4}+\log 2\Big)$$

となる．$b\to\infty$ として，次を得る：

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)(x+4)}\,dx=\frac{1}{2}\log 2$$

(2) $x=\tan\theta$ によって置換積分をする．$b>0$ に対し，$\beta>0$ を $\tan\beta=b$ によって定めると ($\beta=\arctan b$),

$$\int_1^b \frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\beta} d\theta=\beta-\frac{\pi}{4}$$

となる．$b\to\infty$ のとき $\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ だから，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

(3) これは，$\Gamma(n+1)$ を求めている．$n=0$ のときは，

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b})=1$$

となる．$n=1$ のときは，部分積分により，$b>0$ に対して

$$\int_0^b xe^{-x}\,dx=\Big[x(-e^{-x})\Big]_{x=0}^{b}+\int_0^b e^{-x}\,dx=-be^{-b}+(1-e^{-b})$$

となる．ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{b\to\infty}be^{-b}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ だから，

$$\Gamma(2)=\int_0^\infty xe^{-x}\,dx=1$$

となる．一般に，$n \geqq 2$ のときも同様に，$b \to \infty$ のとき $b^n e^{-b} \to 0$ だから，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\left(\Big[x^n(-e^{-x})\Big]_{x=0}^{b} + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx\right)\\ &= n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx\end{aligned}$$

となる．これは，$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を意味し，上で示した $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ を用いると $\Gamma(n+1) = n!$ となる． □

前例題の解答例のように，$[c, \infty)$ 上の広義積分は，$[c, b]$ 上の定積分を計算して，$b \to \infty$ としたときの極限を求めることによって計算される．

例えば，例題 1.2(3) の $n = 0, 1$ の場合を考える．

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty}, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

と書くと，x に ∞ を代入しているかのように見えるが，これを $\lim_{x\to\infty}(-xe^{-x})$ を求めていると考えれば，解答例と同じ計算を行っていることになる．文字「b」を導入する必要がなく便利なので，使いこなして欲しい．

また，(2) は，$x = \tan\theta$ によって区間 $[1, \infty)$ と $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ が対応しているので，

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

と，やはり文字「b」を導入することなく，広義積分が計算できる．

演習 1.3. 次の広義積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+3)}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$

演習 1.4. 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ が収束するような p の範囲を求め，そのときの広義積分の値を求めよ．

演習 4.1 の解答． (1) $\dfrac{\pi}{2}$ (2) 2 (3) 2 (4) $\dfrac{\pi}{2}$
(1) は $x=\sin\theta$，(2) は $x=\sin^2\theta$，(3) は $x=2\sin\theta$，(4) は $x=\sin^2\theta$ とおいて置換積分．

演習 4.2 の解答． (i) $0<p<1$ のとき，
$\displaystyle\int_a^1 x^{-p}\,dx=\frac{1}{1-p}(1-a^{1-p})\to\frac{1}{1-p}$ $(a\to+0)$ であり積分可能で $\displaystyle\int_0^1 x^{-p}\,dx=\frac{1}{1-p}$.
(ii) $p=1$ のとき，$\displaystyle\int_a^1 x^{-1}\,dx=-\log a\to\infty$ $(a\to+0)$ だから，積分可能ではない．
(iii) $p>1$ のとき，$\displaystyle\int_a^1 x^{-p}\,dx=\frac{1}{1-p}(1-a^{1-p})\to\infty$ であり積分可能ではない．

この違いを十分理解することが大切である．

演習 4.3 の解答． (1) $\displaystyle\Big[-\frac{1}{2}x^{-2}\Big]_{x=1}^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\Big(-\frac{1}{2}x^{-2}\Big)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
(2) $y=\log x$ とおいて置換積分すると，$\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{y^2}\,dy=1$.
(3) $y=x^2+1$ とおいて置換積分すると，$\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{2y^2}\,dy=\frac{1}{2}$.
(4) 部分分数展開すると，

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\Big)\,dx&=\frac{1}{3}\Big[\log x-\log(x+3)\Big]_{x=1}^{\infty}\\&=\frac{1}{3}\Big\{\lim_{x\to\infty}\log\frac{x}{x+3}-(-\log 4)\Big\}=\frac{2}{3}\log 2.\end{aligned}$$

(5) π

演習 4.4 の解答． (i) $0<p<1$ のとき，
$\displaystyle\int_1^b x^{-p}\,dx=\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1)\to\infty$ $(b\to\infty)$ であり積分可能ではない．
(ii) $p=1$ のとき，$\displaystyle\int_1^b x^{-1}\,dx=\log b\to\infty$ $(b\to\infty)$ だから，積分可能ではない．
(iii) $p>1$ のとき，$\displaystyle\int_1^b x^{-p}\,dx=\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1)\to\frac{-1}{1-p}$ であり積分可能で，
$\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^p}\,dx=\frac{1}{p-1}$ である．

この違いを十分理解することが大切である．

2　広義積分の収束・発散の判定

正項級数の収束・発散の判定と同様に，広義積分の収束・発散の判定を述べる．証明も同様なので，省略する．

ここでは，$[0, \infty)$ 上の広義積分についてのみ述べる．有界区間やその他の無限区間の場合も同様のことが成り立つ．

広義積分の収束・発散の判定（比較判定法）

定理 2.1. f, g を $[0, \infty)$ 上の連続関数とし，$0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ と仮定する．
(1)[優収束定理] 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,dx$ が収束するならば，$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ も収束する．
(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = \infty$ であれば，$\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,dx = \infty$ である．

(1) $f(x) \geqq 0$ なる関数 f に対して $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ の収束が示したい場合は,

$$f(x) \leqq g(x) \quad かつ \quad \int_0^\infty g(x)\,dx \text{ が収束する}$$

ような関数 $g(x)$ を見つければよい.
(2) $f(x) \geqq 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx = \infty$ が示したい場合は,

$$0 \leqq h(x) \leqq f(x) \quad かつ \quad \int_0^\infty h(x)\,dx = \infty \text{ が成り立つ}$$

ような関数 $h(x)$ を見つければよい.

例題 2.2. 次の広義積分は収束するか，発散するか，判定せよ．

$$(1)\ \int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx \qquad (2)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad (3)\ \int_e^\infty \frac{1}{(\log x)^2}\,dx$$

解答例. (1) $x \geqq 1$ に対して $\dfrac{x}{x^3+1} \leqq \dfrac{1}{x^2}$ が成り立ち，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ は収束するので，収束である．
(2) $0 < x < 1$ に対して $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ が成り立ち,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \Big[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\Big]_{x=0}^{1} = 2$$

であるから，収束である．
(3) 任意の $a > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$ である．ここでは，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{2a}}\,dx = \infty$ が成り立つ

ように $2a \leqq 1$ であるとする．M を

$$\log x \leqq x^a \quad (x \geqq M)$$

が成り立つようにとると，

$$\int_M^\infty \frac{1}{(\log x)^2}\,dx \geqq \int_M^\infty \frac{1}{x^{2a}}\,dx$$

であり，右辺が ∞ であるように a を選んだので，$\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{(\log x)^2}\,dx = \infty$ である． □

演習 2.1. 次の広義積分の収束・発散の判定をせよ．

$$(1)\ \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx \quad (2)\ \int_0^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2+2020}\,dx \quad (3)\ \int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,dx \quad (4)\ \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

演習 2.2. (1) $b > 1$ に対して，次を示せ：

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束することを示せ．
(3) $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx = \infty$ を示せ．

例題 2.3 (ガンマ関数). すべての $p > 0$ に対する広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ の収束を示せ．

解答例. (1) $0 < p < 1$ のとき．

$f(x) = x^{p-1}e^{-x} \to \infty\ (x \to +0)$ だから $(0,1]$ 上の積分が広義積分である．しかし，$g_1(x) = x^{p-1}$ は $(0,1]$ 上積分可能であり，

$$0 < x^{p-1}e^{-x} \leqq x^{p-1} \quad (0 < x \leqq 1)$$

であるから，$f(x) = x^{p-1}e^{-x}$ は $(0,1]$ 上積分可能である．

$x \geqq 1$ に対しては，$0 < p < 1$ のとき $x^{p-1} \leqq 1$ であるから

$$0 < x^{p-1}e^{-x} \leqq e^{-x} \quad (x \geqq 1)$$

が成り立つ．e^{-x} は $[1,\infty)$ 上積分可能だから，$x^{p-1}e^{-x}$ も $[1,\infty)$ 上積分可能である．

したがって，$f(x) = x^{p-1}e^{-x}$ は $(0,\infty)$ 上積分可能である．

(2) $p \geqq 1$ のとき．

$f(x)$ は $[0,\infty)$ 上連続である (積分区間を分けて考えなくてよい). $f(x) \leqq g_2(x)$ をみたし，$[0,\infty)$ 上積分可能な関数 $g_2(x)$ を見つけるために，

$$x^{p-1}e^{-x} = (x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}})e^{-\frac{x}{2}}$$

と分ける．右辺の初めの関数については，$x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}} \to 0$ $(x \to \infty)$ だから，$p \geqq 1$ と合わせて考えると，$[0,\infty)$ 上有界な関数である．つまり，

$$M = \max_{x \geqq 0}(x^{p-1}e^{-\frac{x}{2}})$$

は有限である．

よって，

$$0 \leqq x^{p-1}e^{-x} \leqq Me^{-\frac{x}{2}}$$

であり，$e^{-\frac{x}{2}}$ は $[0,\infty)$ 上積分可能であるから $x^{p-1}e^{-x}$ も $[0,\infty)$ 上積分可能である ($g_2(x) = Me^{-\frac{x}{2}}$ とすればよい)． □

ベータ関数とガンマ関数の間には次のような関係がある．応用上，しばしば現れる．

ベータ関数とガンマ関数の関係

定理 2.4. $p,q > 0$ に対して $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ が成り立つ.

証明. $t = x^2$ によって置換積分をすると，

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx$$

となる．同様に (積分変数を y として)，次が成り立つ：

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{q-1}e^{-t}dt = 2\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}dy.$$

この積を重積分だと考えて，極座標 $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ を用いると

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty\int_0^\infty 4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}(r\cos\theta)^{2p-1}(r\sin\theta)^{2q-1}e^{-r^2}rdrd\theta \\ &= 4\int_0^\infty r^{2p+2q-1}dr\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta\end{aligned}$$

となる．

最後に，$r^2 = t$，$z = \cos^2\theta$ によって変数変換をすると，

$$2rdr = dt, \qquad dz = -2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

となるから，

$$\text{(i)} \int_0^\infty r^{2p+2q-1}dr = \int_0^\infty r^{2p+2q-2}rdr = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{p+q-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma(p+q),$$

$$\text{(ii)} \int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{p-1}(\sin^2\theta)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{p-1}(1-\cos^2\theta)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz = \frac{1}{2}B(p,q)$$

となって，$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ を得る． □

演習 2.1 の解答． (1) 収束．$|e^{-x}\sin x| \leqq e^{-x}$ で $y = e^{-x}$ は $[1,\infty)$ 上積分可能だから．
(2) 発散．$x \geqq \sqrt{2020}$ ならば $\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+2020} \geqq \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ であり，$\displaystyle\int_A^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty$ がすべての A に対して成り立つから．
(3) 収束．(4) 収束．(3) は $\dfrac{1}{x^3+1} \leqq \dfrac{1}{x^3}$，(4) は $\left|\dfrac{\sin x}{x^2}\right| \leqq \dfrac{1}{x^2}$ であり，
$p > 1$ であれば $y = x^{-p}$ が $[1,\infty)$ 上で積分可能である．
演習 2.2 の解答． (1) 部分積分．
(2) (1) の右辺の積分は，$\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqq \dfrac{1}{x^2}$ で $y = x^{-2}$ が $[1,\infty)$ 上積分可能であることから．
(3) $n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqq \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{2}{n\pi}$$

が成り立つ．したがって，2 以上の整数 N に対して

$$\int_1^{N\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqq \sum_{n=1}^{N-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \geqq \sum_{n=1}^{N-1}\frac{2}{n\pi}$$

となる．$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$ だから，右辺は $N \to \infty$ のとき ∞ に発散する．
　よって，$\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \infty$ である．