

第3章 無限級数，べき級数

1 無限級数

部分和

定義 1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \left(\text{これを } \sum_{k=1}^n a_k \text{ と書く} \right)$$

を第 n 項までの和または部分和という.

無限級数の収束・発散

定義 2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分和 s_n の作る数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束するなら，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するという．極限が s ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{と書く.}$$

また， $\{s_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき発散する (収束しない) とき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するという．とくに， $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ であれば，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散するといって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad \text{と書く.}$$

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば， $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である．なぜならば，

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

であり，右辺の2項は $n \rightarrow \infty$ のとき同じ値に収束するからである．しかし，以下に述べ

るように $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であり，一般に逆は成り立たない.¹

一方， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する．この違いを理解することが基本の一つである．

¹演習で $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ が収束することを見る．

次は既習事項ではあるが、この講義では極めて重要である。

例 1.1 (等比数列の和, 等比級数). $a > 0, r \in \mathbf{R}$ ($r \neq 0, 1$) として, $a_n = ar^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. $r^n - 1 = (r - 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1)$ より,

$$s_n = \sum_{k=1}^n ar^{k-1} = a(1 + r + \dots + r^{n-1}) = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

である. よって, $|r| < 1$ であれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ だから, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}$$

が成り立つ.

例題 1.2. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ を示せ. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することを示せ.

解答例. (1) 部分分数展開により, 部分和は

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

となる. $n \rightarrow \infty$ として結論を得る.

(2) $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ とおくと, $\{s_n\}$ は単調増加である.

また, $k \geq 2$ に対して $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ だから

$$s_n < 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) < 2$$

であり, $\{s_n\}$ は上に有界である.

したがって, 実数の連続性より s_n は $n \rightarrow \infty$ のとき収束する. □

演習 1.1. (1) $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ のとき, 部分和 $\sum_{k=1}^n a_k$, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値を求めよ.

(2) $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$ のとき, 部分和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を求め, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値を求めよ.

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ の値を求めよ.

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ の値を求めよ.

2 正項級数の収束・発散の判定

正項級数

定義 3. すべての n に対して $a_n \geq 0$ のとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**と呼ぶ.

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分 and s_n , $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ は $s_n \leq s_{n+1}$ をみたし, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である. したがって,

正項級数は, 収束するか, または ∞ に発散するかのいずれかである.

よって, 実数の連続性 (定理 1.10) から次が分かる.

正項級数の収束

定理 2.1. 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は, 部分和の作る数列 $\{s_n\}$ が上に有界であること, つまり

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq M \quad (n = 1, 2, \dots)$$

をみたす定数 M が存在することである.

これから次の正項級数の収束・発散の判定条件が得られる.

正項級数の収束・発散の判定 (比較判定法)

定理 2.2. $0 \leq a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) と仮定する. このとき, 次が成り立つ:

- (1) [優級数定理] $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束し, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が成り立つ.
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ であれば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ である.

証明. (2) は (1) の対偶であるので, (1) を示せばよい.

定理 2.1 と (1) の仮定から, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq M$ をみたす定数 M が存在し,

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq M$$

となる. よって, $\{s_n\}$ は上に有界であり, 再び定理 2.1 より, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する. $\square$

したがって、正項級数の収束、発散は、次のようにして示すことができる。

正項級数の収束を示す場合

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束を示すには、

$$a_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{かつ} \quad \text{無限級数 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ が収束する}$$

ような b_n を見つければよい。 b_n を a_n の優級数と呼ぶこともある。

正項級数の発散を示す場合

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ を示すには、

$$a_n \geq c_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$$

が成り立つような c_n を見つければよい。

例題 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の収束を示す。

解答例. 例題 1.2 で示したが、上のことを用いて示す。まず、不等式

$$\frac{1}{n^2} \leq \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \frac{1}{(n-1)n} & (n \geq 2) \end{cases}$$

に注意する。右辺の和については、

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

であるから、 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ は 1 に収束する。よって、定理 2.2 より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ も収束する。 $\square$

例題 2.4. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$, (ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3-1}$ の収束を示せ。

解答例. それぞれ、

$$\frac{n}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \frac{n}{n^3-1} \leq \frac{2}{n^2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

に注意して、上の例題の結果を用いればよい。□

前例題 (ii) において、用いた不等式の右辺の「2」に違和感を覚えた人もいると思う。 n が大きいときが問題で、このとき $\frac{n}{n^3-1} \doteq \frac{1}{n^2}$ であり、 $\sum \frac{1}{n^2}$ は収束するので $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3-1}$ も収束すると考えるのが自然であるが、この議論は厳密性に欠ける。上のように述べると数学的に厳密である。「2」は不等号が成り立つような簡単な数として適当に選んだのであり、もっと大きい数でもよい。

例題 2.5. $p > 1$ とすると $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は収束する。

証明. $a_n = \frac{1}{n^p}$ とおくと、 $n \geq 2$ に対して

$$\frac{1}{n^p} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx$$

が成り立つ。そして、右辺の数列の n に関する和は、 $p > 1$ ならば

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{(x-1)^p} dx = \int_2^{\infty} (x-1)^{-p} dx = \left[\frac{1}{-p+1} (x-1)^{-p+1} \right]_{x=2}^{\infty} = \frac{1}{p-1}$$

と収束するので、 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は収束する。したがって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ も収束する。□

演習 2.1. $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ とおく。関数 $y = \frac{1}{x^2}$ のグラフを書いて、その $[1, n]$ 上の積分と s_n を比較することにより、 $s_n \leq 2$ であること、つまり $\{s_n\}$ が上に有界で収束することを示せ。

演習 2.2. 次の無限級数の収束、発散の判定をせよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n-1} \right)^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\frac{1}{n}} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^2}{e^n + 2024n^2}$$

演習 1.1 の解答. (1) $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$ より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$(2) \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{18}$$

(3) 定数 a, b, c を

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

が成り立つように定める. 右辺を通分して分子を比較すると,

$$(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a = 2$$

となり, $a=1, b=-2, c=1$ を得る. よって,

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

となる. よって,

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{n!} \rightarrow 1$$

演習 2.1 の解答. 簡単なので, 省略する.

演習 3.2 の解答. (1),(2),(3) は収束, (4) は発散であることが, 次から分かる.

$$(1) \frac{2n}{3n+1} < \frac{2}{3} \text{ より } \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n < \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

$$(2) \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3n-1} \text{ で } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3n-1} \leq \frac{1}{6} \text{ だから } \left(\frac{2n}{3n-1} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right)^n = \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

$$(3) 2^{-n+\frac{1}{n}} \leq 2^{-n} \times 2$$

$$(4) \frac{n^2}{e^n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \text{ より } \frac{e^n + 2024n^2}{e^n + n^2} \rightarrow 1 \text{ が成り立つ. よって, 例えば, } n \geq N \text{ ならば}$$

$\frac{e^n + n^2}{e^n + 2024n^2} \geq \frac{9}{10}$ となる自然数 N が存在して, $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{e^n + n^2}{e^n + 2024n^2} \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{9}{10}$ であり, 左辺の無限級数の発散が分かる.

3 正項級数の収束・発散の判定 (続き)

例題 3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ を示せ.

解答例. 数列 c_n を

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = c_4 = \frac{1}{4}, \quad c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = \frac{1}{8},$$

$$\text{一般に, } 2^{k-1} < n \leq 2^k \text{ のとき } c_n = \frac{1}{2^k}$$

によって定めると, $c_n \leq \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) である. そして,

$$\sum_{i=1}^{2^k} c_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \cdots + \frac{1}{2^k} \times 2^{k-1} = 1 + \frac{k}{2}$$

であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$ である. よって, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ が成り立つ. □

$y = \frac{1}{x+1}$ のグラフを考えると,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_0^n \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)$$

が容易に分かる. これからも, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ が証明できる.

前節の話と合わせると, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するが, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ である.

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するためには, $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow 0$ が成り立たないといけない. しかし, $a_n \rightarrow 0$ であっても無限級数 $\sum a_n$ が収束するとは限らない.

正項級数の収束・発散の判定法を2つ示す. 基本は, $|r| < 1$ ならば $\sum_{r=0}^{\infty}$ が収束することである.

ダランベールの判定法

命題 3.2. $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) とし, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在すると仮定し, 極限値を r とする.

- (1) $r < 1$ ならば正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.
- (2) $r > 1$ ならば正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散する.
- (3) $r = 1$ のときは, 収束, 発散のいずれもあり得る.

証明. (1) 仮定から, $r + \varepsilon < 1$ をみたす $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して $a_{n+1} < (r + \varepsilon)a_n$ ($n = N, N+1, N+2, \dots$) が成り立つ. または, $\forall \varepsilon > 0$ with $r + \varepsilon < 1$, $\exists N \in \mathbf{N}$ s.t. $a_{n+1} < (r + \varepsilon)a_n$ ($n \geq N$). よって,

$$a_n \leq (r + \varepsilon)^{n-N} a_N \quad (n = N, N+1, N+2, \dots)$$

である. ここで, 数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$b_n = \begin{cases} a_n, & (n \leq N-1) \\ (r + \varepsilon)^{n-N} a_N & (n \geq N) \end{cases}$$

によって定めると, すべての n に対して $a_n \leq b_n$ が成り立つ. さらに, $n \geq N$ に対して

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^n (r + \varepsilon)^{k-N} a_N = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \frac{1 - (r + \varepsilon)^{n+1-N}}{1 - (r + \varepsilon)} a_N < \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \frac{a_N}{1 - (r + \varepsilon)}$$

より, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ は収束する.

したがって, 定理 3.4(1) より, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) 仮定から, $r - \varepsilon > 1$ をみたす $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して ($\forall \varepsilon > 0$ with $r - \varepsilon > 1$, $\exists N \in \mathbf{N}$ s.t.) $a_{n+1} > (r - \varepsilon)a_n$ ($n = N, N+1, N+2, \dots$) が成り立つ. よって,

$$a_n \geq (r - \varepsilon)^{n-N} a_N \quad (n = N, N+1, N+2, \dots)$$

である.

ここで, 数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$c_n = \begin{cases} a_n, & (n \leq N-1) \\ (r - \varepsilon)^{n-N} a_N & (n \geq N) \end{cases}$$

によって定めると, すべての n に対して $a_n \geq c_n$ が成り立つ. さらに, $r - \varepsilon > 1$ だから $c_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であり, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ は ∞ に発散する.

したがって、定理 3.4(2) より、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散する。

(3) $a_n = \frac{1}{n^2}$ のとき、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束。

$a_n = \frac{1}{n}$ のときは、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ である。 $\square$

例題 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ が収束することを示せ。

解答例. $a_n = \frac{n^5}{2^n}$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5 2^n}{2^{n+1} n^5} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \rightarrow \frac{1}{2}$$

となるので、ダランベールの判定法より $\sum a_n$ は収束する。 $\square$

注意 3.4. 上の例題では、 n が大きいとき $\frac{a_{n+1}}{a_n} \doteq \frac{1}{2}$ であること、したがって、 ε を小さくすると

$$a_n \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) a_{n-1} \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^{n-m} a_m$$

が成り立つ。右辺の $n = m$ からの無限和は $\frac{1}{2} + \varepsilon < 1$ であれば収束するので、それより小さい a_n の和も収束するということである。

コーシーの判定法

命題 3.5. $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) とし、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = r$ とおく。

(1) $r < 1$ ならば正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

(2) $r > 1$ ならば正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散する。

(3) $r = 1$ のときは、収束、発散のいずれもあり得る。

とくに、 $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ が収束する場合、コーシーの判定法を用いることができる。また、上極限は ($\pm\infty$ を許せば) 必ず存在するので、コーシーの判定法の方が優れていると言ってよい。

証明. (2) のみ示す。仮定から、 $r - \varepsilon > 1$ をみたす $\varepsilon > 0$ に対して、部分列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ で

$$\frac{1}{a_{n_i}} > r - \varepsilon, \quad \text{つまり, } a_{n_i} > (r - \varepsilon)^{n_i}$$

をみたすものが存在する.

ここで, 非負数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$c_n = \begin{cases} 0, & (n \notin \{n_1, n_2, \dots\}) \\ (r - \varepsilon)^{n_i}, & (n = n_1, n_2, \dots) \end{cases}$$

で定めると, すべての n に対して $a_n \geq c_n$ であり, $r - \varepsilon > 1$ より $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$ である.

したがって, 定理 3.4(2) より, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散する. □

演習 3.1. (1) 命題 3.5(1) を証明せよ. (ヒント: ダランベールの判定法の証明の真似をする.)

(2) 命題 3.5(3) の, 収束, 発散を与える例を, それぞれ与えよ.

(ヒント: すべての $p \in \mathbf{R}$ に対して $(n^p)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.)

演習 3.2. コーシーの判定条件を用いて, 次の無限級数の収束, 発散の判定をせよ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n-1} \right)^n \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\frac{1}{n}}$$

4 無限級数の絶対収束

一般の無限級数の収束のための十分条件として、最も簡単なのは絶対収束性である。

無限級数の絶対収束

定義 4. 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対収束**するという。

記法を簡単にするために、記号を用意する。実数 x に対して

$$x^+ = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \quad x^- = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \\ |x| & (x < 0) \end{cases}$$

とおく。正の数に対してはそれ自身、負の数に対してはその絶対値を対応させている。例えば、 $3^+ = 3, 3^- = 0, (-3)^+ = 0, (-3)^- = 3$ である。

このとき、次が $x \geq 0$ の場合と $x < 0$ の場合に分けて考えると直ぐに分かる：

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-.$$

定理 4.1. 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するための必要十分条件は、正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ がともに収束することである。

証明. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば、 $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|, 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ の収束は定理 2.2(1) から分かる。

逆に、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ が収束するならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$ も収束する。□

絶対収束する無限級数は収束する

定理 4.2. 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束し、次が成り立つ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N a_n^+ - \sum_{n=1}^N a_n^-$ と書くと、定理 4.2 から右辺が収束することから証明される。

正項級数の和は和の順序のよらないことは容易に分かるので、定理 4.2 から、絶対収束する無限級数は和の順序を変えても和の値が変わらないことが分かる。

例題 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ は収束するが、絶対収束はしないことを示せ.

解答例. 絶対収束しないこと、つまり $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ はすでに示した.

収束を示すために、部分和 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ を考えると、

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0,$$

$$s_{2n+2} - s_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$$

が成り立つ. したがって、 $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少であり、 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である. さらに、

$$s_{2n} - s_{2n-1} = -\frac{1}{2n} < 0, \quad \text{よって, } s_{2n} < s_{2n-1}$$

であるから、すべての n に対して

$$s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} < s_{2n-1} < \cdots < s_3 < s_1$$

が成り立つ.

よって、 $s_{2n} < s_1$, $s_{2n-1} > s_2$ より $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界、 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であるから、実数の連続性 (第3回講義. 定理 1.10) よりこれらの奇数番、偶数番だけをとった部分列はともに収束する.

さらに、 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$, $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}$ とおくと、すべての n に対して

$$s_{2n} < s \leq S < s_{2n-1}$$

が成り立つ. 最後に、 $s_{2n-1} - s_{2n} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) に注意すると、 $s = S$ が分かる. $\square$

上の例題で、極限值は $\log 2$ である. 参考のため、導出を示す. このために、関数 $\log(1+x)$ にテイラーの定理を適用して、

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \quad (x > -1)$$

が成り立つことに注意すると、 $x = 1$ として、

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

となる．最後の積分については，

$$0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt < \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つので， $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$ となる．

このように，無限級数の収束を示すことと具体的な値を求めることは別の話であることが多い．具体的な値が求まる場合は，他の話題と関係していて重要であることが多い．

絶対収束する無限級数の和が和をとる順序に依らないことは述べた．

条件収束する無限級数は，一般に和をとる順序によって値が異なる．たとえば，

例題 4.3 で考えた無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の順序を変えて

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

を考えると，この無限級数は $\frac{1}{2} \log 2$ に収束する．

実際，第 $3m$ 項までの部分和を考えると

$$\begin{aligned} s_{3m} &= \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} \right\} + \cdots + \left\{ \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2(2m-1)}\right) - \frac{1}{4m} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2(2m-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2m}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right) \end{aligned}$$

であるから，例題 4.3 より $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{3m} = \frac{1}{2} \log 2$ となる．

s_{3m-1}, s_{3m-2} についても， $m \rightarrow \infty$ のとき

$$s_{3m-1} = s_{3m} + \frac{1}{4m} \rightarrow \frac{1}{2} \log 2, \quad s_{3m-2} = s_{3m} + \frac{1}{2(2m-1)} + \frac{1}{4m} \rightarrow \frac{1}{2} \log 2$$

となるから，次が得られる：

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2} \log 2.$$

演習 3.1 の解答例． 仮定から， $r + \varepsilon < 1$ をみたす任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して， $n \geq N$ ならば $(a_n)^{\frac{1}{n}} < r + \varepsilon$ または $a_n < (r + \varepsilon)^n$ が成り立つ． $r + \varepsilon < 1$ だから $\sum_{n=N}^{\infty} (r + \varepsilon)^n$ は収束し，したがって $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ も収束する．

符号が順番に入れ替わる数列の和を**交代級数**と呼ぶ。例題 4.3 で扱ったのは、典型的な例である。交代級数の収束について、全く同様に、次が証明できる。

定理 4.4. $a_n > 0$ が単調減少で、 $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するならば、交代級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する。

証明. 第 N 部分和を s_N とする：

$$s_{2n-1} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{2n-2} - a_{2n-1}, \quad s_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n}.$$

$\{a_n\}$ が単調減少だから、

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq s_{2n-1}, \quad s_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n}) \leq s_{2n}$$

が成り立ち、 $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加、 $\{s_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ は単調減少である。また、

$$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} > 0 \quad \text{つまり、} s_{2n} > s_{2n-1}$$

が成り立つ。

これらをまとめると、

$$s_1 < s_3 < \cdots < s_{2n-1} < s_{2n} < s_{2n-2} < \cdots < s_0$$

となり、 $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加で上に有界、 $\{s_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ は単調減少で下に有界であり、実数の連続性からともに収束する。さらに、 $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) から、極限が一致することが分かる。 $\square$

5 ベキ級数

$c_0, c_1, c_2, \dots$ を実数として,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad (\text{A.1})$$

という形の (無限) 級数を x の**ベキ級数**という. 微分方程式を解く場合などに, 広く用いられる. 例えば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}$$

が $|\alpha x| < 1$ ならば成り立つ. テイラー展開のように, $x - a$ のベキ級数を考えることも多いが, 簡単のため, ここでは $a = 0$ の場合のみを考える.

本節の目的は, 係数 $c_0, c_1, c_2, \dots$ が与えられたとき, どのような範囲の x に対して上のベキ級数 (A.1) が収束, 発散するかを明らかにすることである.

次の定理が基本である.

ベキ級数の収束・発散

定理 5.1. (1) ベキ級数 (A.1) が, ある $a \neq 0$ で収束するならば, $|x| < |a|$ をみたすすべての x で絶対収束する. つまり, 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ が収束する.
 (2) ベキ級数 (A.1) は, ある $a \neq 0$ で発散すれば, $|x| > |a|$ なるすべての x で発散する.

証明. (2) は (1) の対偶だから, (1) のみを示す.

仮定から, $c_n a^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つので,

$$|c_n a^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

をみたす正数 M が存在する. この M を用いると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n a^n| \left| \frac{x}{a} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{a} \right|^n$$

となり, これらは $\left| \frac{x}{a} \right| < 1$ だから収束する. □

上の定理から, ベキ級数 (A.1) に対しては次の 3 つの場合しか起こらないことが分かる.

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は $x = 0$ のときのみ収束する.
- (ii) ある $r > 0$ が存在して, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は $|x| < r$ ならば収束し, $|x| > r$ ならば発散する.
- (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ はすべての x に対して収束する.

べき級数の収束半径

定義 5. 上の3つの場合のうち, (ii) のとき正数 r をべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径という. (i) のときは収束半径が 0, (iii) のときは収束半径が ∞ であるという.

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径が $r > 0$ のとき, $x = r, x = -r$ におけるべき級数の収束・発散については様々なことが起きる. たとえば,

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は $|x| < 1$ のとき収束し, $x = 1$ では ∞ に発散し, $x = -1$ のときは振動する.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ は, $|x| < 1$ または $x = 1$ のときは収束し (極限が $\log 2$ となることを前節で示した), $x = -1$ では ∞ に発散する.

級数のときと同様, またはそれ以上に, 次のダランベールとコーシーの名を冠した判定法が重要である.

ダランベールの判定法

定理 5.2. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \rho$ が存在するならば, べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径 r は $\frac{1}{\rho}$ に等しい. ただし, $\rho = 0$ のときは $r = \infty$ であり, すべての x に対してこのべき級数は収束する.

また, $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ が ∞ に発散する場合は, $r = 0$ となる.

証明. 次のコーシーの判定法を用いて証明することもできるが, 定義から簡単に証明できる.

(1) $\rho > 0$ の場合を考える. 示すべきことは2つあり,

(i) $|x| < \frac{1}{\rho}$ ならばべき級数が収束すること,

(ii) $|x| > \frac{1}{\rho}$ ならば発散することである.

仮定から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|c_{n+1}| < (\rho + \varepsilon)|c_n| \quad (n \geq N)$$

をみたす $N \in \mathbb{N}$ が存在する. よって, $n \geq N$ ならば $|c_n| \leq (\rho + \varepsilon)^{n-N} |c_N|$ であり

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} (\rho + \varepsilon)^{n-N} |c_N x^n| = \frac{|c_N|}{(\rho + \varepsilon)^N} \sum_{n=N}^{\infty} ((\rho + \varepsilon)|x|)^n$$

となり, $|x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$ ならばこれらは収束する. $\varepsilon > 0$ は任意に小さくとれるので, $|x| < \frac{1}{\rho}$ ならばべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は絶対収束する.

次に, $|x| > \frac{1}{\rho}$ ならばべき級数が絶対収束しないことを示す. このために, $\delta > 0$ を

$$|x| > \frac{1}{\rho - \delta} \quad \left(> \frac{1}{\rho} \right)$$

をみたすようにとる. さらに, $N' \in \mathbf{N}$ を $n \geq N'$ ならば $|c_{n+1}| > (\rho - \delta)|c_n|$ となるようにとると, $|c_n| > (\rho - \delta)^{n-N'} |c_{N'}|$ ($n \geq N' + 1$) が成り立つ.

したがって, $n \geq N' + 1$ に対して

$$|c_n x^n| \geq (\rho - \delta)^{n-N'} |c_{N'}| |x|^n = (\rho - \delta)^{-N'} |c_{N'}| ((\rho - \delta)|x|)^n$$

となり, $|x| > \frac{1}{\rho - \delta}$ ならばこれらは ∞ に発散するので $\sum |c_n x^n|$ も発散する.

δ は任意に小さくとれるので, $|x| > \frac{1}{\rho}$ ならば $n \rightarrow \infty$ のとき $|c_n x^n|$ は ∞ に発散する.
(2) $\rho = 0$ の場合. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|c_{n+1}| < \varepsilon |c_n| \quad (n \geq N)$$

をみたす $N \in \mathbf{N}$ が存在する. よって, $n \geq N$ ならば $|c_n| < \varepsilon^{n-N} |c_N|$ が成り立つから

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon^{n-N} |c_N x^n| = \frac{|c_N|}{\varepsilon^N} \sum_{n=N}^{\infty} (\varepsilon |x|)^n$$

となり, $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$ ならばこれらは収束する. $\varepsilon > 0$ は任意に小さくとれるので, すべての x に対してべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ は絶対収束する.

(3) $\rho = \infty$ の場合. $|x| > 0$ ならばべき級数が絶対収束しないことを示す. このために, $\delta > 0$ を $|x| > \delta$ をみたすようにとる. さらに, $N' \in \mathbf{N}$ を $n \geq N'$ ならば $|c_{n+1}| > \frac{|c_n|}{\delta}$ となるようにとると, $|c_n| > |c_{N'}| \left(\frac{1}{\delta}\right)^{n-N'}$ ($n \geq N'$) が成り立つ. よって,

$$\sum_{n=N'}^{\infty} |c_n x^n| \geq \sum_{n=N'}^{\infty} |c_{N'}| \left(\frac{1}{\delta}\right)^{n-N'} |x|^n = \delta^{N'} |c_{N'}| \sum_{n=N'}^{\infty} \left(\frac{|x|}{\delta}\right)^n$$

となり, これらは $|x| > \delta$ より ∞ に発散する. δ は任意に小さくとれるので, すべての $x \neq 0$ に対してこれらは ∞ に発散する. $\square$

例題 5.3. (1) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ の収束半径は 1 である. 一般に, $a > 0$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} n^a x^n$ の収束半径は 1 である.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ の収束半径は ∞ である.

解答例. (1) $\frac{(n+1)^a}{n^a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \rightarrow 1 \ (n \rightarrow \infty)$ より, ダランベールの判定法より収束半径は 1 である.

(2) $\frac{((n+1)!)^{-1}}{(n!)^{-1}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ より, 収束半径は ∞ である. □

演習 5.1. 次のべき級数の収束半径を求めよ.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

解答は, (1) $\frac{1}{3}$ (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) ∞ .

なお, (1) は判定法を用いるまでもない.

コーシーの判定法

定理 5.4. ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ の収束半径を r とすると,

$$r = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1}$$

が成り立つ. さらに, この等式は, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ のときは $r = \infty$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \infty$ のときは $r = 0$ という意味で, すべての場合に正しい.

証明. $\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} > 0$ の場合のみ示す. その他の場合は演習問題とする. このとき示すべきことは, $|x| < \frac{1}{\rho}$ ならばベキ級数が収束し, $|x| > \frac{1}{\rho}$ ならば発散することである. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbf{N}$ が存在して,

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} \leq \rho + \varepsilon \quad (n \geq N)$$

が成り立つ. したがって,

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} c_n x^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} (\rho + \varepsilon)^n |x|^n$$

であり, これらは $|x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$ なら収束する. ε は任意だから $|x| < \frac{1}{\rho}$ なら, これらは収束する.

次に, $|x| > \frac{1}{\rho}$ とする. $|x| > \frac{1}{\rho - \delta} > \frac{1}{\rho}$ をみたす $\delta > 0$ を任意に固定する. このとき, 上極限の定義から

$$|c_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \rho - \delta$$

をみたす部分列 $\{n_k\}$ が存在する. よって, $(\rho - \delta)|x| > 1$ より

$$|c_{n_k} x^{n_k}| > (\rho - \delta)^{n_k} |x|^{n_k} \rightarrow \infty \quad (n_k \rightarrow \infty)$$

が成り立ち, ベキ級数は $|x| > \frac{1}{\rho - \delta}$ なる x に対して収束しない. δ は任意に小さくとれるので, ベキ級数は $|x| > \frac{1}{\rho}$ なる x に対して収束しない.

よって, ベキ級数の収束半径は ρ^{-1} である. $\square$

演習 5.2. (1) ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ に対して, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ が成り立つならば, 収束半径は ∞ であることを示せ.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \infty$ が成り立つならば, 収束半径は 0 であることを示せ.

(ヒント: 定理 5.2 の証明を参考にせよ.)

演習 5.3. 次のベキ級数の収束半径を求めよ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} x^n \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}} x^n$$

ベキ級数は収束半径内であれば一様収束し、項別微分などの良い性質が成り立つ.

ベキ級数の一様収束

定理 5.5. (1) ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ の収束半径を r とし, $r > 0$ であると仮定する. このとき,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (-r < x < r)$$

とおくと, 任意の $r' < r$ に対して, $n \rightarrow \infty$ のとき $f_n(x)$ は $[-r', r']$ 上で $f(x)$ に一様収束する. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbf{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならばすべての $x \in [-r', r']$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ. または,

$$\max_{-r' \leq x \leq r'} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

(2) $-r < a < b < r$ ならば, $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ が成り立つ.

証明. (1) $r' < \rho < r$ とすると, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k$ が収束するので, $c_k \rho^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) が成り立つ.

つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して, $|c_k \rho^k| < \varepsilon$ ($k \geq N$) が成り立つ.

したがって, $n \geq N$, $|x| \leq r'$ とすると

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |c_k x^k| \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} |c_k \rho^k| \left| \frac{x}{\rho} \right|^k \leq \varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} \left| \frac{x}{\rho} \right|^k = \varepsilon \frac{(r'/\rho)^N}{1 - r'/\rho} < \frac{\varepsilon}{1 - r'/\rho}. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意に小さくとれるので, これは $|f_n(x) - f(x)|$ が, n を十分大きくとると, x によらず小さくなること, つまり $f_n(x)$ が $[-r', r']$ 上一様収束することを示す.

(2) (1) および 3 章の定理 3.2 を用いればよい. □

ベキ級数が収束するならば微分可能で、導関数が項別の微分して得られることを示すために次を示す。

定理 5.6. $\{f_n\}$ を有界閉区間 $[a, b]$ 上の関数列で、各 f_n は $[a, b]$ 上で微分可能で、 f'_n は $[a, b]$ 上で連続であると仮定する。このとき、さらに

- (1) f'_n は $n \rightarrow \infty$ のとき関数 g に $[a, b]$ 上一様収束し、
- (2) ある $c \in [a, b]$ において数列 $\{f_n(c)\}$ は収束する

ならば、 $\{f_n\}$ は一様収束する。そして、極限を f とすると、 f は $[a, b]$ 上微分可能であり $f'(x) = g(x)$ が成り立つ。

証明. 微分積分学の基本定理より

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n(t) dt$$

が成り立つ。仮定より右辺の2つの項が収束するので、各 x に対して $f_n(x)$ は収束する。よって

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) + \int_c^x g(t) dt$$

となる。これは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) = f(c), \quad f'(x) = g(x)$$

を示す。

$\{f_n(x)\}$ の一様収束は、仮定 (i), (ii) を用いて次のようにすればよい。

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(c) - f(c) + \int_c^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f'_n(t) - g(t)| dt \\ &\leq |f_n(c) - f(c)| + \max_{a \leq t \leq b} |f'_n(t) - g(t)| \cdot (b - a). \quad \square \end{aligned}$$

ベキ級数の項別微分, 項別積分

定理 5.7. ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ の収束半径を r とし, $r > 0$ であると仮定する. このベキ級数によって定義される区間 $(-r, r)$ 上の関数を f とする:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (-r < x < r).$$

- (1) ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}$ の収束半径は r である.
 (2) $f(x)$ は $(-r, r)$ 上微分可能で, 導関数 f' は (1) のベキ級数によって与えられる:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

- (3) $-r < a < b < r$ のとき, 次が成り立つ:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

証明. (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \log(k^{\frac{1}{k}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log k = 0$ であり, $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{k}} = 1$ だから, コーシーの判定法により

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |k c_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{k}} |c_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r}$$

となる. よって, もう一度コーシーの判定法を用いれば, 結論を得る.

(2) $r' < r$ とする. $f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ とおくと, $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k c_k x^{k-1}$ であり, (1) より $f'_n(x)$ は $[-r', r']$ 上一様収束する. 極限を $g(t)$ と書く. また, $f_n(0) = c_0$ は n によらない (特に収束する). よって, $-r' < x < r'$ に対して

$$f_n(x) = c_0 + \int_0^x f'_n(t) dt$$

と書くと, $\{f'_n(t)\}$ が $[-r', r']$ 上 $g(t)$ に一様収束するので, 前定理を用いれば

$$f(x) = c_0 + \int_0^x g(t) dt \quad (-r' \leq x \leq r')$$

となる. $f'(x) = g(x)$ であり r' は任意に r に近くとれるので, 結論を得る.

(3) 省略する. □

演習 5.4. $|x| < 1$ に対して, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ とおく.

(1) f の導関数を考えることにより, $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ を求めよ.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ を求めよ.

演習 5.2 の解答. (1) 仮定から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|c_n|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$ または $|c_n| < \varepsilon^n$ が成り立つ. よって,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon^n |x|^n$$

が成り立つ. 右辺は $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$ であれば収束するので, このとき左辺も収束する. ε は任意に小さくとれるので, これはこれらのべき級数が任意の x に対して収束することを示している.

(2) 仮定から, 任意の $M > 0$ に対して自然数 N' が存在して, $n \geq N'$ ならば $|c_n|^{\frac{1}{n}} > M$ または $|c_n| > M^n$ が成り立つ. よって,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n| \geq \sum_{n=N}^{\infty} M^n |x|^n$$

が成り立つ. この右辺が収束するには..... あとは各自で !!

演習 5.3 の解答. (1) $\frac{1}{e}$ (2) $\frac{e}{2}$

演習 5.4 の解答. (1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ だから, 両辺を微分すると

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

となり, x を掛けると

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

となる.

(2) 同様に, (1) の結果の両辺を微分して x を掛けると

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$