

第2章 関数の連続性

1 連続関数

I を $[\alpha, \beta], (\alpha, \beta]$ などの形の区間とし, f を I 上の関数とする. $a \in I$ に対して, $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow f(a)$ が成り立つとき, 正確に言うと, I に含まれ a に収束するすべての数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $f(x_n) \rightarrow f(a)$ が成り立つとき, f は a で連続であるという¹.

f が区間 I のすべての点で連続であるとき, f は I 上連続である, または f は I 上の連続関数であるという.

例 1.1 (ヘビサイド関数). $\mathbf{R}$ 上の関数 H を $H(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0) \\ 1, & (x \geq 0) \end{cases}$ によって定めると,

H は $x = 0$ で連続ではない. 実際, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ とおくと $a_n \rightarrow 0$ だが, n が奇数なら $f(a_n) = 0$ で偶数なら $f(a_n) = 1$ だから $f(a_n)$ は収束しない.

連続関数は $y = f(x)$ のグラフに切れ目がない関数と考えればよいが, 今後の議論においては次の ε - δ 論法が役に立つ.

関数の連続性

定理 1.2 (p.204). f を区間 I 上の関数とし, $a \in I$ とする. f が a で連続であるための必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ ならば, つまり $|x - a| < \delta$ であるすべての $x \in I$ に対して, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となること, または $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, である.

証明は省略する. $x \equiv a$ ならば $f(x) \equiv f(a)$ であることを言っていることが理解できればよい.

f が a で連続でないということは, グラフが切れているということだが, ε - δ 論法では, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対して

$|x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$ が成り立つような $x \in I$ が存在すること

または, $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in (a - \delta, a + \delta), |f(x) - f(a)| > \varepsilon$,

である (定理の条件を否定している).

ヘビサイド関数の場合は,

$0 < \varepsilon < 1$ をみたとす ε をとれば, 任意の $\delta > 0$ に対して

$|x - 0| < \delta$ かつ $|f(x) - f(0)| = 1 > \varepsilon$ となる x が存在する ($-\delta < x < 0$ なら条件をみたす).

¹ a が区間 I の端点の場合は, 極限を片側からの極限に置き換えて考える.

次の一様連続性という概念につなげるために、基本的な関数を使って具体的なことを考える。

例 1.3. $f(x) = x^2$ とする。

(1) f は $x = 0$ において連続である。これは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ととると、 $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ ならば $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ が成り立つ、ことから証明される。

(2) $x = a \in (0, 1)$ において f が連続であることを示すためには、 $x, a \in (0, 1)$ として $\varepsilon > 0$ に対して、 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となるように δ を決めればよい。今、

$$|f(x) - f(a)| = |(x + a)(x - a)| < 2|x - a| \quad (0 < a, x < 1)$$

であるから、 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ととると、

$x, a \in (0, 1)$ が $|x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ をみたせば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる。

(3) $x = a \in (10, 11)$ において f が連続であることを示すためには、 $x, a \in (10, 11)$ として、 $\varepsilon > 0$ に対して、 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となるように δ を決めればよい。今、

$$|f(x) - f(a)| = |(x + a)(x - a)| < 22|x - a| \quad (10 < a, x < 11)$$

であるから、 $\delta = \frac{\varepsilon}{22}$ ととると、

$x, a \in (10, 11)$ が $|x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{22}$ をみたせば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる。

$f(x) = x^2$ は $[0, 1]$ ではゆっくりと増加するので $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ととればよかったが、 $[10, 11]$ では早く増加するので δ は小さく $\frac{\varepsilon}{22}$ とする必要がある。

詳しく言うと、 $f(x) = x^2$ に対して

$$|f(x) - f(a)| = |x + a| \cdot |x - a|$$

である。よって、 $x, a > 0$ が大きいときは、

$|f(x) - f(a)|$ を小さくしたいならば、 $|x - a|$ をずっと小さくする必要がある。

言い方を変えると、 $f(x) = x^2$ に対して

$\varepsilon > 0$ に対して、 $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ (#)

ように δ を選ぶことはできない。 δ は単に小さくとるのではなく、

x, a の動く範囲と ε に応じて 小さく選ぶ必要がある。実際、

$|x - a| = \frac{\delta}{2}$ でも $x + a > \varepsilon \frac{2}{\delta}$ であれば、 $|x + a| \cdot |x - a| > \varepsilon$ が成り立つ。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して (#) がすべての x, a に対して成り立つような δ が存在するとき、 f は一様連続であるという。

一様連続な関数

定義 1. f を区間 I 上の連続関数とすると、
 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、
 $|x - x'| < \delta$ をみたすすべての $x, x' \in I$ に対して $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成り立つ
 とき、 f は I 上で一様連続であるという。

一様連続な関数の例をあげる。

命題 1.4. f が区間 I 上で微分可能で、導関数 f' が連続かつ有界であれば、 f は I 上で一様連続である。

証明. $|f'(x)| \leq M$ ($x \in I$) と仮定すると、 $x' > x$ であれば

$$|f(x') - f(x)| = \left| \int_x^{x'} f'(t) dt \right| \leq \int_x^{x'} |f'(t)| dt \leq M|x' - x|$$

だから、 $|f(x') - f(x)| \leq M|x' - x|$ が成り立つ。 $x > x'$ のときも同じ不等式が成り立つ。

よって、 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ とおけば、次が成り立つ：

$$|x' - x| < \delta \text{ ならば } |f(x') - f(x)| \leq M|x' - x| < \varepsilon.$$

□

例 1.5. (1) $\sin x, \cos x$ は $\mathbf{R}$ 上で一様連続である。

(2) $f(x) = \tan x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) は一様連続ではない。

(3) $a < b$ とするとき、 $f(x) = e^x$ ($a < x < b$) は一様連続である。

(4) $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbf{R}$) は一様連続ではない。

演習 1.1. (1) $f(x) = e^x$ ($0 < x < 1$) が一様連続であることを示せ。

(2) $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbf{R}$) は一様連続ではないことを示せ。

次が重要で主張の意味もはっきりしているが、次節以外では必要ないので証明は省略する。

一様連続な関数の例

定理 1.6. 有界閉区間上の連続関数は一様連続である。

2 定積分

前章で述べた ε - δ 論法, 前節で述べた関数の一様連続性を用いると, 解析学 IA において棚上げした連続関数の定積分可能性の証明を与えることができる.

連続関数の積分可能性

定理 2.1. f が有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数であれば, f は $[a, b]$ 上で積分可能である.

証明. すべてを数学的に話すのは未だ困難な部分がありあまり意味がないので, 感じがつかめるような話を順序立ててする.

(I) f は一様連続である.

したがって, 任意に $\varepsilon > 0$ を固定して, $\delta > 0$ を

$$x, x', |x - x'| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

となるようにとる. さらに, $[a, b]$ の分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を, $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ をみたすものとし, m_i, M_i を次で定める:

$$m_i = \min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad M_i = \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

(II) $0 \leq M_i - m_i < \varepsilon$ が成り立つ. (定義から)

(III) f のリーマン和に対する評価を行う. $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ として,

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

とおく. このとき, (II) より次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) &\leq S(\Delta) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \\ 0 &\leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

(IV) $m(\Delta) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$, $M(\Delta) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$ とおき

$$m = \sup_{\Delta} m(\Delta), \quad M = \inf_{\Delta} M(\Delta)$$

とおくと ($\sup_{\Delta}$, $\inf_{\Delta}$ は分割全体に関する上限, 下限を表す), 次がすべての分割 Δ に対して成り立つ:

$$m(\Delta) \leq m \leq M \leq M(\Delta).$$

(V) (III) は, $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$ が小さいような分割 Δ を考えれば $M(\Delta) - m(\Delta)$ をいくらでも小さくできると言っているので, $M = m$ でありこれが定積分の値である. $\square$

3 関数列の収束

I を区間とし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を I 上の関数列, f を I 上の関数とする. このとき, すべての $x \in I$ に対して, 数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ に収束するとき, つまり任意の $x \in I$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して², $n \geq N$ であれば

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つとき, I 上で関数列 $\{f_n\}$ は f に**収束** (または**各点収束**) するという.

例 3.1. 以下の例では $I = [0, 1]$ とする.

(1) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ とすると, $\{f_n\}$ は 0 に収束する.

(2) $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ とすると, $\{f_n\}$ は 0 に収束する.

(3) $f_n(x) = e^{-nx}$ とおく. I 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

で定めると, $\{f_n\}$ は f に収束する. 各 f_n は連続関数だが, f は連続関数ではない.

(4) $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & (\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

によって定めると, 関数列 $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ は 0 に収束する. (グラフを描いてみよ.)

例 (1),(2) では, $\varepsilon > 0$ に対して $\frac{1}{N} < \varepsilon$, つまり $N > \frac{1}{\varepsilon}$ であれば, すべての $n \geq N$ に対して

$$(1) |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad (2) |f_n(x) - 0| \leq \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

がすべての $x \in [0, 1]$ に対して成り立つ.

これに対して, (3),(4) では, n を ε だけではなく x にも応じて大きくとらないと $|f_n(x)| < \varepsilon$ とはできない. (4) であれば, $\frac{2}{n} < x$, つまり $n > \frac{2}{x}$ であれば $f_n(x) = 0$ となり $|f_n(x)| < \varepsilon$ とできると考えるのが自然で易しい.

(1),(2) のように, N を ε のみから定めることができる場合, 一様収束という.

² 「自然数 $N = N(\varepsilon, x)$ が存在して」と書くと ε と x から決まることが目に見えてオススメである.

関数列の一致収束

定義 2. $\{f_n\}$ を区間 I 上の関数列, f を I 上の関数とするとき,
任意の $\varepsilon > 0$ に対して (ε のみから決まる) 自然数 N が存在して,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

がすべての $n \geq N$ とすべての $x \in I$ に対して成り立つとき, $n \rightarrow \infty$ のとき関数列 $\{f_n\}$ は f に I 上で**一致収束**するという.

関数列が一致収束する場合は, 次が成り立つ.

定理 3.2. 有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に I 上一致収束すると仮定する. このとき, 次が成り立つ:

(1) f は連続関数である, つまり, すべての $p \in I$ で連続である.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ が成り立つ.

証明. (1) 示すべきことは, $p \in I$ とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して,
 $|x - p| < \delta$ ならば $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ となることである.

仮定から, 上の ε に対して自然数 N が存在して,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

がすべての $n \geq N$, すべての $x \in I$ に対して成り立つ.

ここで, $n \geq N$ を一つ固定する. すると, f_n は連続関数だから, 上の ε に対して $\delta > 0$ が存在して

$|x - p| < \delta$ ならば $|f_n(x) - f_n(p)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ が成り立つ.

以上を合わせると,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(p) + f_n(p) - f(p)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(p)| + |f_n(p) - f(p)| \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

となり, 結論を得る.

(2) 示すべきことは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して, $n \geq N$ であれば

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

となることである.

仮定から、この ε に対して自然数 N が存在して、
 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ がすべての $n \geq N$ 、すべての $x \in I$ に対して成り立つ。
したがって、 $n \geq N$ であれば

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon$$

となる。 □

一様収束をしない関数列に対しては、定理は成立しない。(1) に関しては例 3.1(3) 参照。(2) に関しては例 3.1(4) と似た関数列を考える。

例 3.3. $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ を、例 3.1(4) と同じ、

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ -n^2 \left(x - \frac{2}{n}\right) & (\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

によって定めると、関数列 $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ は 0 に収束する。しかし、すべての n に対して $\int_0^1 f_n(x) dx = 1$ であり、0 には収束しない。(図を描いて確かめること)