

第1章 数列

1 数列の収束

$a_1, a_2, \dots$ と実数を並べたものを**実数列**または**数列**と呼び, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ または $\{a_n\}$ と書く. また, $a_0, a_1, a_2, \dots$ と a_0 から始める場合は $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, 一般に, $a_k, a_{k+1}, \dots$ と a_k から始める場合は $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ などと書く. いずれの場合も, a_n を**一般項**と呼ぶ.

$\{a_n\}$ の一部, つまり, $\{n_i\}$ を $n_1 < n_2 < \dots$ をみたす自然数からなる数列として, $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ の形の数列を考えることもある. このような数列を $\{a_n\}$ の**部分列**と呼ぶ. 例えば, $\{a_{2n}\}$ は $\{a_n\}$ の部分列の一つである.

例 1.1. (1) $a_n = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと, n を大きくすると a_n は 0 に近づく.

(2) $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと, n を大きくすると b_n は, 正の値と負の値を交互にとりながら 0 に近づく.

(3) p を $|p| < 1$ である実数とし $c_n = p^n$ とおくと, n を大きくすると c_n は 0 に近づく.

(4) p を $|p| < 1$ である実数とし, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$S_n = 1 + p + p^2 + \dots + p^n$$

と定める. $S_n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$ であり, $\{S_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{1 - p}$ に収束する.

(4) で述べた等比数列の和の公式は次のように考えると, 容易に理解される. まず, 因数分解の公式, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, さらに

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1), \quad x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

を思い出す. これから, $1 + x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{1 - x}$, さらに

$$1 + x + x^2 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^3}{1 - x}, \quad 1 + x + x^2 + x^3 = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

となる. 一般には, $x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$ であり

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{が成り立つ.}$$

数列の極限

定義 1. n を大きくすると a_n の値が定数 α に近づくとき、数列 $\{a_n\}$ は α に収束する
という

$$a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

などと表し、 α を $\{a_n\}$ の極限または極限值という。

演習 1.1. (1) $n \rightarrow \infty$ のとき $x^n \rightarrow 0$ となる実数 x の範囲は何か。

(2) $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n^a} \rightarrow 0$ となる a の範囲は何か。

数列は収束するとは限らない。収束・発散を考える場合は a_n に関する計算、議論を行って

$$a_n = \cdots \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad a_n = \cdots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

と書くことを勧める。たとえば、数列 $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 へ収束するが、これは

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

とすれば示すことができるし、分かりやすい。

また、 $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ の極限を考える。これは、区分求積法により（積分計算は略）

$$\begin{aligned} \log a_n &= \log(n!)^{\frac{1}{n}} - \log n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log k - \log n \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\log k - \log n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{k}{n} \rightarrow \int_0^1 \log x dx = -1 \end{aligned}$$

となり、 $a_n \rightarrow e^{-1}$ となる。いきなり $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書いても話は進まないであろう。

数列の発散

定義 2. 数列 $\{a_n\}$ がどんな実数にも収束しないとき、 $\{a_n\}$ は発散するという。

例 1.2. (1) $\{n\}, \{n^2\}, \{n^a\}$ ($a > 0$), $\{e^n\}$ などのように, n を大きくすると a_n がいくらでも大きくなる時 $\{a_n\}$ は ∞ (無限大) に発散するといって

$$a_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

などと表す.

(2) $-\infty$ に発散することも同様に定義する.

(3) 発散する数列 $\{a_n\}$ が ∞ にも $-\infty$ にも発散しないとき, **振動する**という. たとえば, 次が振動する数列の例である.

$$\{(-1)^n\}, \quad \{(-1)^n n\}, \quad \{(-2)^n\}.$$

収束する数列の性質

定理 1.3. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき, それぞれ α, β に収束すると仮定すると次が成り立つ.

(1) $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n b_n\}$ も収束して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \pm \beta, \quad (\text{複合同順})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta.$$

さらに, $b_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\beta \neq 0$ ならば, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ も収束して極限値は $\frac{\alpha}{\beta}$ である.

(2) $a_n \leq b_n$ であれば, $\alpha \leq \beta$ が成り立つ.

(3) **(はさみうちの原理)(非常に重要)** $\alpha = \beta$ のとき, 数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つならば, $\{c_n\}$ も同じ極限値 α に収束する.

(1) $a_n < b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) であっても極限値 α, β に対して $\alpha < \beta$ とは限らず, 一致することもある. たとえば,

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{2}{n} \quad \text{または} \quad a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

とすると, いずれの場合も $a_n < b_n$ だが共に 0 に収束する.

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに発散するときは, $\{a_n b_n\}, \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ の収束, 発散について様々なことが起きる. ケースバイケースなので, その都度, 考えること.

はさみうちの原理を用いた議論の例をあげる.

例題 1.4. (1) $\frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ が成り立つことを示せ.

(2) $a > 1$ であるすべての実数, 自然数 m に対して $\frac{n^m}{a^n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ が成り立つことを示せ.

$a > 1$ に対して a^n のような増大の仕方を**指数増大**といい, n^c のような増大の仕方を**多項式増大**という. 1年生の解析で, ロピタルの定理を用いて $\frac{x^c}{e^x} \rightarrow 0 \ (x \rightarrow \infty)$ がすべての $c > 0$ に対して成り立つことを示した. いずれにしても, 「指数増大の方が多項式増大よりもはるかに早く増大する」. これは, 数学に限らず, 様々なところで重要である.

解答例. (1) $0 < \frac{n^2}{2^n} < b_n$ かつ $b_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ をみたす $\{b_n\}$ を見つければよい. そこで,

b_n として $\boxed{\frac{n^2}{(n \text{ の 3 次式})}}$ の形であれば, と考えてみる.

二項定理

$$(x+y)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}y + \cdots + {}_nC_{n-1} xy^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

を用いると, $x = y = 1$ として

$$2^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k > {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad (n = 3, 4, \dots)$$

が分かる. これから,

$$0 < \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{{}_nC_3} = 3! \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. したがって, はさみうちの原理により $\frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ が成り立つ.

(2) アイディアは(1)と同じである. 解析学 II 演習の問題とする. □

注意 1.5. ここでは簡単のため, 3次式を考えた. 次数が高ければ何でもよいことが分かるであろう. これは, (2) のヒントになる.

ネイピアの数

命題 1.6. x が実数の範囲で大きくするときも $x \rightarrow \infty$ とかく. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N$ をネイピアの数とすると, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を示せ.

証明. n を $n \leq x < n+1$ をみたす自然数とすると, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ だから

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \quad (\text{注: 考察対象を中心に!})$$

が成り立つ. e の定義が使えるように, 左辺を下から, 右辺を上から評価すると,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

となるから,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$$

が成り立つ. この右辺も, 左辺も $n \rightarrow \infty$ のとき e に収束することから結論を得る. $\square$

演習 1.2. 次の数列の数列の収束, 発散を判定せよ. 収束する場合は, 極限値を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \frac{3n+1234}{n^2} \quad (2) \frac{n^2-1}{n^2+1} \quad (3) \frac{n^3-8}{n^2+1} \quad (4) \frac{3^n}{5^n+1} \quad (5) \frac{3^n}{(-5)^n+1} \\ (6) \frac{(-5)^n}{3^n+27} \quad (7) \sqrt{n+88} - \sqrt{n} \quad (8) \frac{3^n}{n!} \quad (9) \frac{8^n}{n!} \quad (10) \frac{2^n}{e^n} \end{aligned}$$

演習 1.3. (1) ∞ に発散する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ で, $\{a_n - b_n\}$ も ∞ に発散する例をあげよ.

(2) ∞ に発散する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ で, $\{a_n - b_n\}$ が収束する例をあげよ.

演習 1.4. 2 の n 乗根 $\sqrt[n]{2}$ に対して, $\sqrt[n]{2} = 1 + h_n$ とおく. $n \geq 2$ に対して $nh_n < 1$ が成り立つこと, $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことを示せ.

演習 1.5. c を正の数とすると, 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n - c^{-n}}{c^n + c^{-n}}$ を, c の値で場合分けをして, 求めよ.

2 ε - N 論法

数列の収束の数学的な「定義」を与える．意味を理解をし自分でも使えるようになることが目的である．

動機付けとして，次を考える．意味を各自よく考えて欲しい．

収束する数列の平均の収束 (チェザロ和)

定理 2.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき α に収束するなら， $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ も α に収束する．つまり，次が成り立つ：

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha = \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \rightarrow 0.$$

直感的には「 n が大きいとき， $a_1, a_2, \dots, a_n$ のほとんどは α に近いのだから，その平均も α に近い」ということである．これは，試験の結果が全員 80 点なら平均も 80 点で，全員でなくても 80 点と違う人が多くないなら平均は「ほぼ 80 点」ということと本質的に同じことである．

しかし，上の定理を厳密に証明するにはどうすれば良いだろうか？このために，そして数学の多くの場面で，便利なのが，ここで述べる ε - δ 論法である． ε - δ 論法というのは，ここで述べるような論法の総称である．分かり易いように，本節の論法を δ - N 論法と呼ぶことにする．

数列の収束の定義

定義 3. (1) 数列 $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき実数 α に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して， $n \geq N$ であれば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となることである．

(2) $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき ∞ に発散するとは，任意の実数 R に対して自然数 N が存在して， $n \geq N$ ならば $a_n > R$ となることである．

注意 2.2. 十分大きい n に対して $a_n \doteq \alpha$ が成り立つということを，論理的に述べている．たとえば， $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ であれば， a_n が 3 になることはないが， ε ほど (少し) 幅を持たせると， $\frac{1}{N} < \varepsilon$ となる N をとると $n \geq N$ ならば a_n は $3 \pm \varepsilon$ の中に入っている ($\frac{1}{N} < \varepsilon$ とすると， $n \geq N$ なら $|a_n - 3| < \varepsilon$ となる) ということである．

注意 2.3. N は ε に応じて決める．例えば， $a_n = \frac{1}{n^2}$ であれば， $\varepsilon > 0$ に対して N を $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ より大きな整数とすれば良い．ギリギリの N が必要ならば， $[x]$ を x 以下の最大の整数 (ガウス記号) として， $N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$ とすれば $\frac{1}{N^2} < \varepsilon$ であり， $n \geq N$ ならば

$$a_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon$$

より， $a_n < \varepsilon$ となる．

注意 2.4. 定義 3 の ε を 2ε ，一般に M を定数として $M\varepsilon$ に置き換えてもよい． ε は任意に小さくとれるので 2ε もいくらでも小さくできるということである．実際に色々なことの証明をする際に便利さが分かると思う．

演習 2.1. $a_n = e^{-2n}$ とするとき，正の数 ε に対して

「 $n \geq N$ ならば $a_n < \varepsilon$ が成り立つ」

ように N を ε を用いて表せ．

直感的には自明の定理 2.1 に対して、「証明」を与える.

収束する数列の平均の収束 (チェザロ和)

定理 2.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき α に収束するなら, $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ も α に収束する. つまり, 次が成り立つ:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha = \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \rightarrow 0.$$

定理 2.1 の証明. $b_n = a_n - \alpha$ とおくと, $\{b_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. 示すべきことは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して,

$$n \geq N \text{ ならば } \left| \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \right| < \varepsilon \quad (*)$$

が成り立つことである.¹

以下, $\varepsilon > 0$ を上のものとする.² 仮定から, 自然数 N_1 が存在して

$$n \geq N_1 \text{ をみたすすべての } n \text{ に対して } |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

が成り立つ. この N_1 を用いて, $n \geq N_1$ である n に対して

$$\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = \frac{b_1 + \cdots + b_{N_1} + b_{N_1+1} + \cdots + b_n}{n} = \frac{b_1 + \cdots + b_{N_1}}{n} + \frac{b_{N_1+1} + \cdots + b_n}{n}$$

と 2 つの項に分ける.

右辺第一項は, N_1 を固定したので, $n \rightarrow \infty$ とすると 0 に収束する. つまり, 自然数 N_2 が存在して次が成り立つ:

$$n \geq N_2 \text{ をみたすすべての } n \text{ に対して } \left| \frac{b_1 + \cdots + b_{N_1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

よって, 三角不等式 $|a + b| \leq |a| + |b|$ を繰り返し用いると, $n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ なら

$$\begin{aligned} \left| \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \right| &\leq \left| \frac{b_1 + \cdots + b_{N_1}}{n} \right| + \left| \frac{b_{N_1+1} + \cdots + b_n}{n} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|b_{N_1+1}| + \cdots + |b_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}(n - N_1)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

が成り立つ. つまり, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば $n \geq N$ ならば $(*)$ が成り立つ. これが示すべきことであった. $\square$

注意 2.5. 注意 2.4 で述べたように, (1) と (2) の右辺を収束の定義通りに ε とすると, (3) の途中の $\varepsilon/2$ が ε , 最後が 2ε となって証明が終わる.

¹ このようにゴールを明記して, ゴールを目指して進むと理解しやすい. 今後多くの場面で現れる.

² 目標を書くと, 議論のための記号も用意されている.

収束の定義の中の

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して、 $n \geq N$ であれば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる」を、記号を用いて

$\lceil \forall \varepsilon, \exists N \in \mathbf{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \text{ (} n \geq N \text{)} \rceil$

または、

$\lceil \forall \varepsilon, \exists N \in \mathbf{N} \text{ s.t. } n \geq N \text{ なら } |a_n - \alpha| < \varepsilon \rceil$

というように、簡単に書くのが習慣である。習慣なので、慣れて欲しい。

(講義中は、両方書くように努力しますが...)

なお、 $\forall$ は「Any」、 $\exists$ は「Exist」の先頭の A と E を用いた記号で、「s.t.」は「such that」の略である。

命題 2.6. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、それぞれ、 $n \rightarrow \infty$ のとき α, β に収束するならば、 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\alpha + \beta$ に収束する。

証明. 示すべきことは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して、

$n \geq N$ ならば $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$ となること、つまり

$-\varepsilon < (a_n + b_n) - (\alpha + \beta) < \varepsilon$ が成り立つこと、である。

仮定から、自然数 N_1 で

$n \geq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるものが存在する。

同様に、自然数 N_2 で

$n \geq N_2$ ならば $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるものが存在する。

したがって、 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば、すべての $n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。

よって、すべての $n \geq N$ に対して

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon \quad \text{または} \quad -\varepsilon < (a_n + b_n) - (\alpha + \beta) < \varepsilon$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。 □

3 実数の連続性

数列の収束を示すために便利な議論について述べる．極限值が直ぐには分からない場合に非常に有効である．

例題 3.1. $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ とおく． $n \rightarrow \infty$ のとき a_n が収束することを示せ．

解答例. まず,

$$(i) a_n < a_{n+1} \quad (ii) a_n < 2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つことに注意する． $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ より,

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

であることから, (ii) は分かる．

この2つから $\{a_n\}$ が収束して (これが実数の連続性と呼ばれる性質である), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2$ であることが分かる． $\square$

上の例題では, a_n は単調に増加するが2より大きくなることはないことを示した．これから a_n が $n \rightarrow \infty$ のときある実数に収束することを理解してほしい．

極限値は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ である．理解には別の学習の必要がある．

実数の連続性について正確に述べる．このために, 数列の性質を2つ与える．

単調数列

定義 4. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \quad (\text{すべての } n \text{ に対し } a_n \leq a_{n+1}) \quad (a_n \leq a_{n+1} \quad (\forall n))$$

が成り立つとき, $\{a_n\}$ は**単調増加**であるという．また,

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \quad (\text{すべての } n \text{ に対し } a_n \geq a_{n+1}) \quad (a_n \geq a_{n+1} \quad (\forall n))$$

が成り立つとき, $\{a_n\}$ は**単調減少**であるという．

不等号 $\leq$ ($\geq$) を $<$ ($>$) として不等式が成り立つとき, **狭義単調増加 (減少)** という．

有界な数列

定義 5. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、定数 M が存在して、すべての n に対して $a_n \leq M$ が成り立つとき ($\exists M$ s.t. $a_n \leq M$ ($\forall n$) のとき), $\{a_n\}$ は上に有界であるという.

一方, $\exists M' \text{ s.t. } a_n \geq M' (\forall n)$ のとき, $\{a_n\}$ は下に有界であるという.

次が基本的な定理である.

実数の連続性

定理 3.2. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加 (減少) かつ上 (下) に有界であれば, ある実数に収束する.

定理 3.2 は, 実数の範囲で考えているので成り立つ. 有理数は連続性を持たない. つまり, 各 a_n が有理数であっても極限が有理数とは限らない. たとえば,

$$a_1 = 3.1, \quad a_2 = 3.14, \quad a_3 = 3.141, \quad a_4 = 3.1415, \dots$$

(a_n は π の小数点以下 n ケタまでの近似) とすると, a_n は有理数だが極限 π は無理数である. 冒頭の例題の結果も同様の例を与えている.

実数の連続性 (定理 3.2) は次のように用いられる.

例題 3.3. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ をみたすとする. $a_1 = 2$ のとき, a_n の収束を示し, 極限を求めよ.

解答例. (1) $0 < a_n < 3$ ($n = 1, 2, \dots$) を示す (注意. 脚注を参照. 極限 λ は $\lambda = \sqrt{\lambda + 6}$ をみたすに違いなく, $\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$ より $\lambda = 3$ が予想される.).³

$n = 1$ のときは仮定から成り立つ.

n まで成り立つとする. $a_{n+1} > 0$ は漸化式から明らかであり, 帰納法の仮定より

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$$

となるから, $n + 1$ のときも正しい.

よって, 数学的帰納法により, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < a_n < 3$ が成り立つ.

(2) $\{a_n\}$ が単調増加であることを示す. このためには, $a_n > 0$ より $a_{n+1}^2 > a_n^2$ を示せば良い. これは, 漸化式と $0 < a_n < 3$ より

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n + 6 - a_n^2 = -(a_n^2 - a_n - 6) = -(a_n - 3)(a_n + 2) > 0$$

³ 「3」がどこからきたか疑問に思う人がいると思う. これは求める極限である. 数学は (何事も?) 上手くいくと信じて考えることが重要で, この場合まず収束すると考える. すると, 漸化式で極限をとると (3) の解答にある 2 次方程式を考えることになって, -2 は明らかに不適なので, 収束するなら極限が 3 であることが分かる. しかし, これでは収束することの証明にはなっていないので, 次に証明を考えることになる. そして, 今の場合は実数の連続性を使えるということになる.

また重要なことは, a_2, a_3 を計算してみることである. $a_2 = \sqrt{2+6} = 2\sqrt{2} \approx 2.828, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2}+6} \approx 2.97..$ から何か感じると思うが, どうだろうか?

となることから分かる.

(3) 実数の連続性から $\{a_n\}$ は収束し, 極限值 λ は $2 < \lambda \leq 3$ をみたす. 漸化式で $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lambda = \sqrt{\lambda + 6}$ が成り立ち,

$$\lambda^2 - (\lambda + 6) = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

より, $\lambda = 3$ または -2 となる. そして, $2 < \lambda \leq 3$ より $\lambda = 3$ となる. □

上の例で見るように, $\{a_n\}$ が単調増加のとき, 真の不等式 $a_n < M$ がすべての n に対して成り立っていても, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < M$ とは限らない. この節の始めに述べた例のように真の不等号が成り立つ場合もあるが, 一般には $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$ である.

もっと易しい例では, $a_n = 5 - \frac{1}{n}$ とすれば, $a_n < 5$ だが極限は 5 である.

次の 2 題は必ず自分で解くこと. 解答はあえて載せません.

演習 3.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$ をみたし, $0 \leq a_1 < 1$ と仮定する. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ.
- (2) $a_n < 1$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ.
- (3) $\{a_n\}$ の極限值を求めよ.

演習 3.2. 漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考えて, $1 < a_1 < 2$ と仮定する.

- (1) すべての $n = 1, 2, \dots$ に対し $1 < a_n < 2$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ.
- (2) $\{a_n\}$ が単調増加数列であることを示せ.
- (3) $\{a_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ とした極限を求めよ.

演習 3.3. (1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ によって定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることを示せ.
(2) $a_n < 3$, $n = 1, 2, \dots$ を示せ.

言うまでもなく, 演習 3.3 の数列の極限がネイピアの数 e である.

次は、必須とはしないが、是非トライしてほしい問題である。

参考. 正の一般項をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定まり、 $0 < b_1 < a_1$ と仮定する。このとき、 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ値に収束することを次の手順で示せ。

- (1) $b_n < a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を示す。
- (2) $\{a_n\}$ が単調減少、 $\{b_n\}$ が単調増加であることを示す。
- (3) $\{a_n\}$ が下に有界、 $\{b_n\}$ が上に有界であることを示す。
- (4) 極限値の一致を示す。

参考. $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とおく。

- (1) $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少、 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ。
- (2) $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界、 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ が収束することを示せ。(ちなみに、極限は $\log 2$ である。)
- (3章で詳しく述べるが、無限級数の値を求めること以外は、この時点でも十分できます。)

4 上限, 下限

集合には最大値, 最小値が存在するとは限らないが, 議論の中でその代わりをする量が必要になる. これが, **上限, 下限**である.

これを用いると, 実数の連続性を, より正確なものにして証明することができる. 初めて聞くことばがいくつかあるが, 少し考えると簡単なことである.

例 4.1. $A = [0, 1)$ という $\mathbf{R}$ の部分集合を考える. A に最大値は存在しないが, 1 は「最大値のようなもの」である. 実際, 1 は集合 A の上限である.

0 は A に含まれるので, 0 は A の最小値である. そして, 下限でもある.

上限, 下限

定義 6. A を $\mathbf{R}$ の部分集合とする.

(1) A が上に有界な集合のとき, A のすべての元より大きいかまたは等しい数を A の**上界**という. つまり, すべての $a \in A$ に対して $a \leq \lambda$ が成り立つとき, λ を A の上界という. A の上界の中で最小の数を A の**上限**と呼び, $\sup A$ と書く.

A が下に有界な集合のとき, A のすべての元より小さいかまたは等しい数を A の**下界**という. つまり, すべての $a \in A$ に対して $a \geq \mu$ が成り立つとき, μ を A の下界という. A の下界の中で最大の数を A の**下限**と呼び, $\inf A$ と書く.

(2) A が上 (下) に有界でないとき, $\sup A = \infty$ ($\inf A = -\infty$) と書く.

(3) A が数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のとき, $\sup\{a_n\}$ を $\sup_{n \geq 1} a_n$, $\inf\{a_n\}$ を $\inf_{n \geq 1} a_n$ と書く.

$\sup A = \infty$ とは, A の中にいくらでも大きい元 (要素) が存在するということである. 従って,

$$a_n \in A, \quad a_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

をみたす A の元の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\sup_{n \geq k} a_n = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$, $k = 1, 2, \dots$ も考える.
これを $\bar{a}_k$ と書くと, (直感的に言うと, 候補が多い方が最大値は大きくなるので)

$$\bar{a}_{k+1} \leq \bar{a}_k$$

が成り立つ. つまり, 数列 $\{\bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調減少である.

同様に, $\underline{a}_k = \inf_{n \geq k} a_n = \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\}$ とおくと,

$$\underline{a}_{k+1} \geq \underline{a}_k$$

が成り立つ. つまり, 数列 $\{\underline{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調増加である.

もちろん, $\bar{a}_k \geq \underline{a}_k$ である.

集合の最大値, 最小値はその集合の元でないといけないので, これらは存在するとは限らない. しかし, 上限と下限は, $\infty, -\infty$ を許せば, 必ず存在する.

集合 A の最大値, 最小値が存在するとき, それぞれ $\max A, \min A$ と表す. A が数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のときは, $\max_{n \geq 1} a_n, \min_{n \geq 1} a_n$ と書く. 最大値 (最小値) が存在するならば, それは上限 (下限) である.

例 4.2. (1) $A = (0, 2]$ のとき, $\min A$ は存在しない. その他については,

$$\max A = \sup A = 2, \quad \inf A = 0.$$

(2) $A = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ のとき, $\max A = \sup A = 1, \min A = \inf A = -1$.

(3) $a_n = (-1)^{n-1} + \frac{1}{n}$ のとき, $\min_{n \geq 1} a_n$ は存在しない. その他については,

$$\max_{n \geq 1} a_n = \sup_{n \geq 1} a_n = 2(= a_1), \quad \inf_{n \geq 1} a_n = -1.$$

$\{a_n\}$ を実直線上に書いて, 自分で確かめること!

演習 4.1. $a_n = (-1)^n n$ のとき, $\bar{a}_{2k-1}, \underline{a}_{2k-1}, \bar{a}_{2k}, \underline{a}_{2k}$ を求めよ.

$\mathbf{R}$ の部分集合 A に対して, $\sup A = a$ とすると, 任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ である.

上限 a は A の上界の中で最小だから, a に近い A の元が存在する, つまり
「任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a - \varepsilon < x$ をみたす $x \in A$ が存在する。」
実際, ある $\delta > 0$ に対して $x \leq a - \delta$ がすべての $x \in A$ に対して成り立つとすると, $a - \delta$ も A の上界であり上限 $a = \sup A$ の最小性に反する.

したがって, 単調増加で a に収束する A の元の列, つまり

$$a_n \in A, \quad a_n \leq a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

をみたす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する.

演習 4.2. $a_n = \frac{2n}{2n-7}, S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とするとき, $\inf S, \sup S$ を求めよ. また, $\max S, \min S$ は存在するかどうか述べ, 存在するならその値を書け.

(ヒント: $n = 1, 2, 3$ のときのみ $a_n < 0$ だから最小値はそのいずれかである. $n \geq 4$ のときの様子は $a_n = 1 + \frac{7}{2n-7}$ と書いてみると分かる.)

上限, 下限を用いると, 実数の連続性を正確に述べて, 証明することができる.

実数の連続性

定理 4.3. (1) 数列 $\{a_n\}$ が単調増加かつ上に有界であれば, $\{a_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $\sup_{n \geq 1} a_n$ に収束する.

(2) $\{a_n\}$ が単調減少かつ下に有界であれば, $\{a_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき $\inf_{n \geq 1} a_n$ に収束する.

証明. (1) のみ示す. 収束することは実数の連続性そのものなので, 極限についてのみ述べるがこれも易しい.

$\lambda = \sup_{n \geq 1} a_n$ とおくと, 仮定から λ は有限な値である.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N で, $n \geq N$ ならば $a_n > \lambda - \varepsilon$ となるものが存在する

ことを示せば, $a_n \leq \lambda$ だからこれは $a_n \rightarrow \lambda$ を意味する.

しかし, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lambda$ とすると, $\{a_n\}$ の単調性から, ある $\delta > 0$ が存在してすべての n に対して $a_n \leq \lambda - \delta$ が成り立つことになる. これは λ が上限であることに反する. $\square$

5 コーシー列

数列の収束を示すために重要であるだけでなく、集合の完備性と呼ばれる概念につながる重要な話題である。

コーシー列

定義 7. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を数列とするとき、

任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して、

$m, n \geq N$ であれば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ となるとき、

言い換えると、 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ s.t. $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ($m, n \geq N$), のとき、

$\{a_n\}$ はコーシー列であるという。

コーシー列と収束

定理 5.1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束するための必要十分条件は、 $\{a_n\}$ がコーシー列であること。

証明. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束すると仮定する。極限を α とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して、 $n \geq N$ であれば $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ をみたす ($\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ s.t. $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($n \geq N$)). よって、 $m, n \geq N$ であれば、

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立ち、 $\{a_n\}$ はコーシー列である。

逆に、 $\{a_n\}$ はコーシー列であると仮定する。

(I) 定義の ε を $\frac{\varepsilon}{3}$ におきかえて、

$m, n \geq N$ であれば $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ が成り立つように N を選ぶ。

このとき、 $a_n - a_N < \frac{\varepsilon}{3}$, つまり $a_n < a_N + \frac{\varepsilon}{3}$ ($\forall n \geq N$) より、

$$\sup_{n \geq 1} a_n \leq \sup\{a_1, \dots, a_N, a_N + \frac{\varepsilon}{3}\}$$

が成り立つ。右辺は有限数列の上限で、有限な値であるから、 $\{a_n\}$ は上に有界な数列である。

(II) $\{a_k\}, \{\bar{a}_k\}$ を

$$\underline{a}_k = \inf_{n \geq k} a_n = \inf\{a_k, a_{k+1}, \dots\}, \quad \bar{a}_k = \sup_{n \geq k} a_n = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$$

で定めると、これらが収束することを示す。

まず、 $\underline{a}_k \leq \bar{a}_k$ が成り立つ。さらに、前節で述べたように、

$$\underline{a}_k \leq \underline{a}_{k+1}, \quad \bar{a}_k \geq \bar{a}_{k+1}$$

が成り立つ。つまり、 $\{\underline{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調増加、 $\{\bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調減少であり、次が成り立つ：したがって、すべての k に対して

$$\underline{a}_1 \leq \underline{a}_2 \leq \cdots \leq \underline{a}_k \leq \bar{a}_k \leq \cdots \leq \bar{a}_2 \leq \bar{a}_1 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (\spadesuit)$$

よって、 $\{\underline{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調増加かつ上に有界 ($\underline{a}_k \leq \bar{a}_1$) であり、 $\{\bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調減少かつ下に有界 ($\bar{a}_k \geq \underline{a}_1$) であるので、ともに収束する。

(III) $\underline{\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_k$, $\bar{\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k$ において、 $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$ を示す。 $\underline{a}_k \leq \bar{a}_k$ より、 $\underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ は明らかである。

今、自然数 N が存在して $n \geq m \geq N$ ならば $|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ であり、

$$a_m - \frac{\varepsilon}{3} < a_n < a_m + \frac{\varepsilon}{3}$$

である。 m を固定して、 a_n に関する下限、上限を考えると、

$$a_m - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq a_m + \frac{\varepsilon}{3}$$

または、 $a_m - \frac{\varepsilon}{3} \leq \underline{a}_n \leq \bar{a}_n \leq a_m + \frac{\varepsilon}{3}$ が成り立つ。したがって、 $n \geq N$ であれば

$$0 \leq \bar{a}_n - \underline{a}_n \leq \left(a_m + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(a_m - \frac{\varepsilon}{3}\right) < \varepsilon$$

となる。これは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{a}_n - \underline{a}_n) = 0$ 、または $\underline{\alpha} = \bar{\alpha}$ を意味する。

(IV) 最後に、 $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = \alpha$ において、 $a_n \rightarrow \alpha$ を示す。自明な不等式、 $\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n$ より

$$\underline{a}_n - \alpha \leq a_n - \alpha \leq \bar{a}_n - \alpha \quad (\diamond)$$

が成り立つ。 $(\spadesuit)$ より、 $\underline{\alpha} = \alpha \leq \bar{a}_n$, $\bar{\alpha} = \alpha \geq \underline{a}_n$ であるから、それぞれを $(\diamond)$ の右辺、左辺に用いると、

$$\underline{a}_n - \bar{a}_n \leq \underline{a}_n - \alpha, \quad \bar{a}_n - \alpha \leq \bar{a}_n - \underline{a}_n$$

となるから、

$$\underline{a}_n - \bar{a}_n \leq a_n - \alpha \leq \bar{a}_n - \underline{a}_n$$

を得る。 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{a}_n - \underline{a}_n) = 0$ を上で示したので、 $a_n - \alpha \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が得られた。 $\square$

例題 5.2 (連分数). $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 3 + \frac{1}{2}, \quad a_3 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}, \quad a_4 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

または漸化式 $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{a_n}$ で定まる数列とする。このとき、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束することを示し、極限値を求めよ。

解答例. $a_n > 3$ ($n = 2, 3, \dots$) は、漸化式から明らかである. このことを用いて $\{a_n\}$ がコーシー列であることを示す. 示すべきことは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して

$$m, n \geq N \text{ ならば } |a_m - a_n| < \varepsilon$$

となることである.

$n \geq 3$ に対して

$$|a_n - a_{n-1}| = \left| 3 + \frac{1}{a_{n-1}} - \left(3 + \frac{1}{a_{n-2}} \right) \right| = \frac{|a_{n-1} - a_{n-2}|}{a_{n-1}a_{n-2}} < \frac{1}{9} |a_{n-1} - a_{n-2}|$$

が成り立つので,

$$|a_n - a_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{9} \right)^{n-3} |a_3 - a_2| \quad (n = 3, 4, \dots)$$

が成り立つ. よって, $m \geq n$ であれば, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \left\{ \left(\frac{1}{9} \right)^{m-3} + \left(\frac{1}{9} \right)^{m-4} + \dots + \left(\frac{1}{9} \right)^{n-2} \right\} |a_3 - a_2| \\ &< \left\{ \left(\frac{1}{9} \right)^{n-2} + \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} + \dots \right\} |a_3 - a_2| \\ &= \frac{\left(\frac{1}{9} \right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{9}} |a_3 - a_2|. \end{aligned}$$

ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N を $\frac{\left(\frac{1}{9} \right)^{N-2}}{1 - \frac{1}{9}} |a_3 - a_2| < \varepsilon$ をみたすように選ぶと, $m \geq n \geq N$ であれば,

$$|a_m - a_n| < \frac{\left(\frac{1}{9} \right)^{n-2}}{1 - \frac{1}{9}} |a_3 - a_2| \leq \frac{\left(\frac{1}{9} \right)^{N-2}}{1 - \frac{1}{9}} |a_3 - a_2| < \varepsilon$$

となる. よって, $\{a_n\}$ はコーシー列であり, 定理 5.1 より収束する.

極限值 λ は $\lambda = 3 + \frac{1}{\lambda}$ をみたし, かつ $\lambda > 3$ である. よって, 二次方程式 $\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$ を解けば, $\lambda = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ となる. □

6 上極限, 下極限

前回述べた数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することとコーシー列であることの同値性の証明の中で,

$$\underline{a}_k = \inf_{n \geq k} a_n = \inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\}, \quad \bar{a}_k = \sup_{n \geq k} a_n = \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

を考えた.

$\{\underline{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調増加であり, $\{\bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調減少である. よって, $k \rightarrow \infty$ のとき, 収束するか, $\infty, -\infty$ に発散するかのいずれかである.

上極限, 下極限

定義 8. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{n \geq k} a_n \right)$ を $\{a_n\}$ の下極限と呼び, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ と表す. また, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq k} a_n \right)$ を $\{a_n\}$ の上極限と呼び, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ と表す.

例 6.1. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ とおくと,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

a_n の初めのいくつかの項を実直線上に書いて, 確かめること.

記号をよく見ること. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ の $n \rightarrow \infty$ の位置をよく見ること. $\limsup$ は一つの記号であって, $\lim$ と $\sup$ を合わせた記号ではない. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ は n が大きいときの「最大値」のようなものを表すと言ってよい.

上極限, 下極限について

定理 6.2. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 次が成り立つ.

- (1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2) $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ で, $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ をみたすものが存在する. 同様に, $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n'_j}\}_{j=1}^{\infty}$ で, $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n'_j} = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ をみたすものが存在する.
- (3) $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束するための必要十分条件は, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ がともに有限で, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ が成り立つことである.

諸君が慣れ親しんできた数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, 集合の最大値, 最小値は, 必ずしも存在するとは限らない.

これに対して, ここで扱った, 上限, 下限, 上極限, 下極限は, $\pm\infty$ を許せば必ず存在し, 議論の役に立つ.

定理 6.2 の証明. 上と同様,

$$\underline{a}_k = \inf_{n \geq k} a_n = \inf\{a_k, a_{k+1}, \dots\} \text{ (単調増加!)}, \quad \bar{a}_k = \sup_{n \geq k} a_n = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\} \text{ (単調減少!)}$$

とおく.

(1) すべての k に対して $\underline{a}_k \leq \bar{a}_k$ が成り立つので, 両辺の極限をとれば結論を得る.

(2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ が有限のときだけ示す. この値を α とする. つまり,

単調減少数列 $\bar{a}_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$ が α に収束するとすると,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して, $k \geq N$ ならば

$$\alpha \leq \bar{a}_k < \alpha + \varepsilon \quad (*)$$

が成り立つ.

一方, $\bar{a}_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, \dots\}$ に対しては,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\bar{a}_k - \varepsilon < a_{n_k} \leq \bar{a}_k$ が成り立つような $n_k \geq k$ が存在する. さらに, $\alpha \leq \bar{a}_k$ を上で示したので

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_k} \leq \bar{a}_k \quad (\#)$$

が成り立つ.

よって (*) の右の不等式と (#) より, $k \geq N$ に対して

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_k} \leq \bar{a}_k < \alpha + \varepsilon$$

が成り立つ. 特に, $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ であり, $\{a_{n_k}\}$ の $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ への収束を得る.

下極限についても, 同様である. 各自, 試みて欲しい.

(3) $\{a_n\}$ が α に収束することを仮定する. つまり,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ ($n \geq N$) となることを仮定する.

このとき, $k \geq N$ ならば $\underline{a}_k = \inf_{n \geq k} a_n \leq \alpha + \varepsilon$ が成り立つので,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_k \leq \alpha + \varepsilon$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ は任意なので,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \alpha$$

となる.

同様に, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \alpha$ を示すことができ, 結局

$$\alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \alpha$$

となる. これから $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ を得る.

逆に, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ を仮定する. この値を α とすると,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{a}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \alpha$$

である. また, $n \geq k$ であれば,

$$\underline{a}_k \leq a_n \leq \bar{a}_k$$

となるので, $\{a_n\}$ の α への収束が分かる. □

演習 6.1. $a_n = \frac{(-1)^n 2n}{n+1}$ とおくとき, $a_1 \sim a_6$ を数直線上にプロットして感じをつかみ, 次の値を求めよ.

$$(1) \inf_{n \geq 1} a_n \quad (2) \sup_{n \geq 1} a_n \quad (3) \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (4) \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

演習 6.2. $a_n = \frac{2n}{2n-7} = 1 + \frac{7}{2n-7}$ とおくとき, $a_1 \sim a_6$ を数直線上にプロットして感じをつかみ, 次の値を求めよ.

$$(1) \inf_{n \geq 1} a_n \quad (2) \sup_{n \geq 1} a_n \quad (3) \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (4) \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

第1章演習問題の解答またはヒント

演習 1.1. (1) $|x| < 1$ (2) $a > 0$

演習 1.2. (1) 0 に収束 (2) 1 に収束 (3) ∞ に発散 (4) 0 に収束

(5) 0 に収束 (6) 振動する (7) 0 に収束

(8) 次に注意すると, はさみうちの原理から 0 に収束することが分かる:

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot 3 \cdot 3}^n}{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} < \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{n \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad (n \geq 5).$$

(9) 0 に収束 (9) 0 に収束

演習 1.3. (1) $a_n = n^2$, $b_n = n$ など多数.

(2) (i) $a_n = \sqrt{n+1}$, $b_n = \sqrt{n}$ (ii) $a_n = \log n$, $b_n = \log \frac{n}{2}$ (iii) $b_n = a_n - 1$ のとき, など多数.

演習 1.4. $2 = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n$ に注意すればよい.

演習 1.5. (1) $0 < c < 1$ のとき, 分母, 分子に c^n を掛けると $c^{2n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) より

$$\frac{c^n - c^{-n}}{c^n + c^{-n}} = \frac{c^{2n} - 1}{c^{2n} + 1} \rightarrow -1.$$

(2) $c = 1$ のときは 0.

(3) $c > 1$ のとき, 分母, 分子を c^n で割ると $c^{-2n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) より

$$\frac{c^n - c^{-n}}{c^n + c^{-n}} = \frac{1 - c^{-2n}}{1 + c^{-2n}} \rightarrow 1.$$

例題 1.4(2). $a = 1 + h$ ($h > 0$) とおく. (1) の二項定理を用いた議論を参考にすると, $n \geq m + 1$ ならば

$$(1 + h)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k h^k > {}_nC_{m+1} h^{m+1} \quad (\text{ただし, } n \geq m + 1 \text{ とする.})$$

であることを使えば良いということに気づく. ただし, $n \geq m + 1$ とする. すると,

$$0 < \frac{n^m}{(1 + h)^n} < \frac{n^m}{{}_nC_{m+1} h^{m+1}}$$

であり,

$$0 < \frac{n^m}{(1 + h)^n} < \frac{(m + 1)!}{h^{m+1}} \frac{\overbrace{n \cdot n \cdots n}^m}{\underbrace{n(n-1) \cdots (n-m+1)(n-m)}_{m+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。よって、はさみうちの原理から結論を得る。

演習 2.1. $a_n < \varepsilon$ の両辺の対数をとると、 $\log a_n = -2n < \log \varepsilon$ となる。これから、 N を $N \geq -\frac{1}{2} \log \varepsilon = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon}$ をみたす整数とすると、 $n \geq N$ に対して $a_n < \varepsilon$ となる。

演習 4.2. $\inf S = \min S = a_3 = -6$, $\sup S = \max S = a_4 = 8$

演習 6.1. $a_1 = -1, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = -\frac{3}{2}, a_4 = \frac{8}{5}, \dots$ また,

$$a_{2k-1} = -\frac{-2(2k-1)}{2k} = -2 + \frac{1}{k},$$
$$a_{2k} = \frac{2 \cdot 2k}{2k+1} = 2 - \frac{2}{2k+1}.$$

したがって,

$$(1) \inf_{n \geq 1} a_n = -2 \quad (2) \sup_{n \geq 1} a_n = 2 \quad (3) \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -2 \quad (4) \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

演習 6.2. $a_1 = -\frac{2}{5}, a_2 = -\frac{4}{3}, a_3 = -6, a_4 = 8, \dots$ また,

$$a_n = 1 + \frac{7}{2n-7}.$$

したがって,

$$(1) \inf_{n \geq 1} a_n = -6 \quad (2) \sup_{n \geq 1} a_n = 8 \quad (3) \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (4) \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$