

解析学 IB：第 1 回講義 (2025 年 9 月 22 日)

このノートを読んで、演習問題を解くことで、2025 年度後期「解析学 IB」(担当：松本) の第 1 回講義への出席とします。今回の目標は、

- 1) 偏微分とは何かについて学習すること、
- 2) 直線のパラメータ表示と平面の方程式に関して復習すること、です。

教科書としてあげた「解析学入門」(市原直幸、増田哲、松本裕行著、培風館) を合わせて参照してほしいと思います。

この講義ノートは私が個人的に作成したものです。大きな誤りはないと思いますが、タイプミスや演習問題の解答の計算ミスがあると思います。不明な点は質問して下さい。なお、今回 1 回目は特別なので、番号付けが 0.1 などとなっています。

0.1. 偏導関数

解析学 IB の目的は、2 変数関数に関する微分、積分の習得である。まず、2 変数関数の導関数の計算に関して学習する。その意味などについては、次回から詳しく述べる。

D を xy 平面内の領域とし、 $z = f(x, y)$ を D 内の点 (x, y) に実数 $f(x, y)$ を対応させる関数とする。

例 0.1. (1) $z = f(x, y) = x - 2y + 3$ は、 $\mathbf{R}^2$ 全体を定義域とする関数である。グラフは空間内の平面になる。

(2) $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ は、原点を中心とする半径 2 の円盤 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ を定義域とする関数である。グラフは、原点中心、半径 2 の球面である。

$z = f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ の集合 D 上で定義された関数とする。 D 内の点 (a, b) に対し、(1) $y = b$ と固定して x のみの関数 $z = f(x, b)$ を考えたとき、 $x = a$ におけるその微分係数を f の (a, b) における x に関する**偏微分係数**といい、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial}{\partial x}f(a, b), \quad f_x(a, b)$$

などと表す：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

(2) $x = a$ と固定して y のみの関数 $z = f(a, y)$ を考えたとき、 $y = b$ におけるその微分係数を f の (a, b) における y に関する**偏微分係数**といい、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), \quad \frac{\partial}{\partial y}f(a, b), \quad f_y(a, b)$$

などと表す：

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

関数 f の定義域の各点 (x, y) に対して偏微分係数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ の値を対応させる 2 変数関数を、それぞれ x, y に関する**偏導関数**と呼ぶ。やはり、 $f_x(x, y), f_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ などと書く。偏導関数を求めることを、**偏微分**するという。

例題 0.2. (1) $z = f(x, y) = e^{2x} \sin(3y)$ の x, y に関する偏導関数を求めよ。

(2) $z = f(x, y) = x^y$ ($x > 0, y \in \mathbf{R}$) の x, y に関する偏導関数を求めよ。

解答. (1) x に関する偏導関数を求めるには、 y は固定して定数とみなして、 x について微分すればよく、 $f_x(x, y) = 2e^{2x} \sin(3y)$ となる。

一方、 y に関する偏導関数を求めるには、 x は固定して定数とみなして、 y について微分すればよく、 $f_y(x, y) = 3e^{2x} \cos(3y)$ となる。

(2) 対数微分を行う。 $\log f(x, y) = y \log x$ である。

両辺を x で偏微分すると、左辺については合成関数の微分の公式を用いて、

$$\frac{f_x(x, y)}{f(x, y)} = \frac{y}{x}$$

となる。よって、 $f_x(x, y) = f(x, y) \frac{y}{x} = yx^{y-1}$ となる。

y に関する偏導関数は、 $\frac{f_y(x, y)}{f(x, y)} = \log x$ より、 $f_y(x, y) = x^y \log x$ となる。□

演習 0.1. 次の関数の x, y に関する偏導関数を求めよ。ただし、(3) は $x > 0, y > 0$ とする。

$$(1) f(x, y) = 5x - 4y + xy + 9 \quad (2) f(x, y) = 4x^3 + 2x^2y - 3y^3$$

$$(3) f(x, y) = \log \frac{y}{x} \quad (4) f(x, y) = \frac{y}{2x+3} \quad (5) f(x, y) = (x+y)e^{3y}$$

演習 0.1 の解答.

$$(1) f_x = 5 + y, \quad f_y = -4 + x$$

$$(2) f_x = 12x^2 + 4xy, \quad f_y = 2x^2 - 9y^2$$

$$(3) f_x = -\frac{1}{x}, \quad f_y = \frac{1}{y}$$

$$(4) f_x = \frac{-2y}{(2x+3)^2}, \quad f_y = \frac{1}{2x+3}$$

$$(5) f_x = e^{3y}, \quad f_y = e^{3y} + (x+y) \cdot 3e^{3y} = (3x+3y+1)e^{3y}$$

0.2. 直線，平面の方程式(復習・確認)

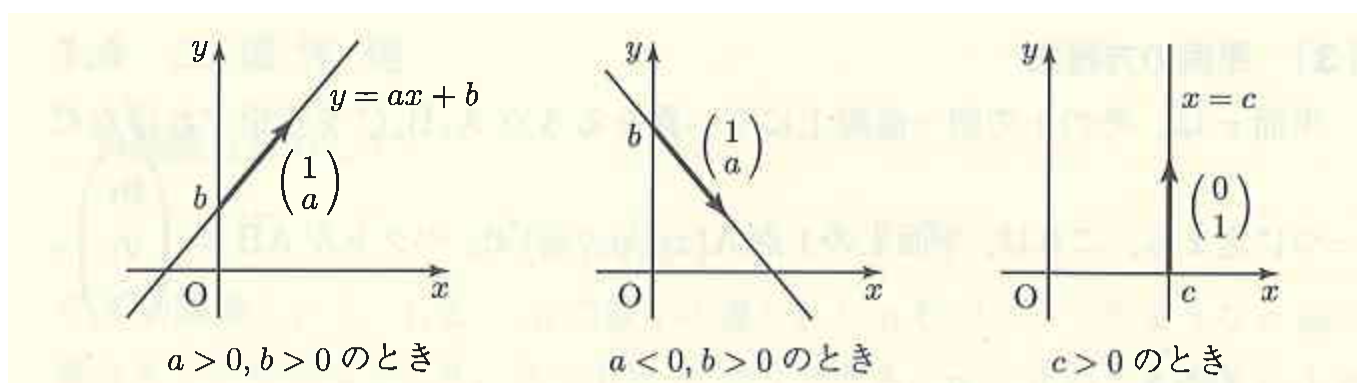
平面上の直線，空間内の直線，平面のパラメータ表示や方程式について復習する．

[1] 平面上の直線

xy 平面上の直線は， $y = ax + b$ または $x = c$ (a, b, c は定数) という形の方程式で与えられる． a は x の値が 1 増加したときの y の変化量を表し，直線の傾きと呼ばれる． b は $x = 0$ のときの y の値で，直線 $y = ax + b$ は点 $(0, b)$ を通る．

直線 $y = ax + b$ のグラフ上の点 (x, y) は， $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$ とパラメータ表示される．

一方，直線 $x = c$ 上の点 (x, y) は， $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$ とパラメータ表示される．



直線 $y = ax + b$ 上の点に到達するには，原点から点 $(0, b)$ に移動して，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ またはその逆方向に何倍か移動すればよい．

直線 $x = c$ 上の点であれば，原点から $(c, 0)$ に移動して，ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ またはその逆方向に何倍か移動すると到達する．

これらのことを表したのが，直線のパラメータ表示である．ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を，それぞれの直線の方向ベクトルという．方向ベクトルのとり方は一通りではなく，符号を変えて逆向きにしても定数倍しても方向ベクトルである．

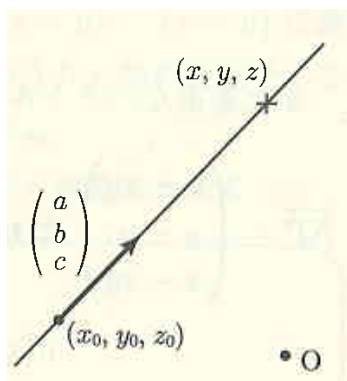
[2] 空間内の直線

xyz 空間内の直線も, xy 平面と同様, パラメータ表示される.

直線は, 直線上の 1 点 (x_0, y_0, z_0) と方向ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ からただ一つに定まり, 直線上の点 (x, y, z) はその位置ベクトルが

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

という形で与えられる. 図示すると次のようになる.



これから, a, b, c のいずれも 0 でないなら, t を消去して,

$$(t =) \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

となる. これを**直線の方程式**という.

演習 0.2. ℓ を空間内の 2 点 $(1, 2, 3)$ と $(2, 3, 1)$ を通る直線とする.

(1) ℓ の方向ベクトルを求め, ℓ をパラメータ表示せよ.

(2) ℓ の方程式を求めよ.

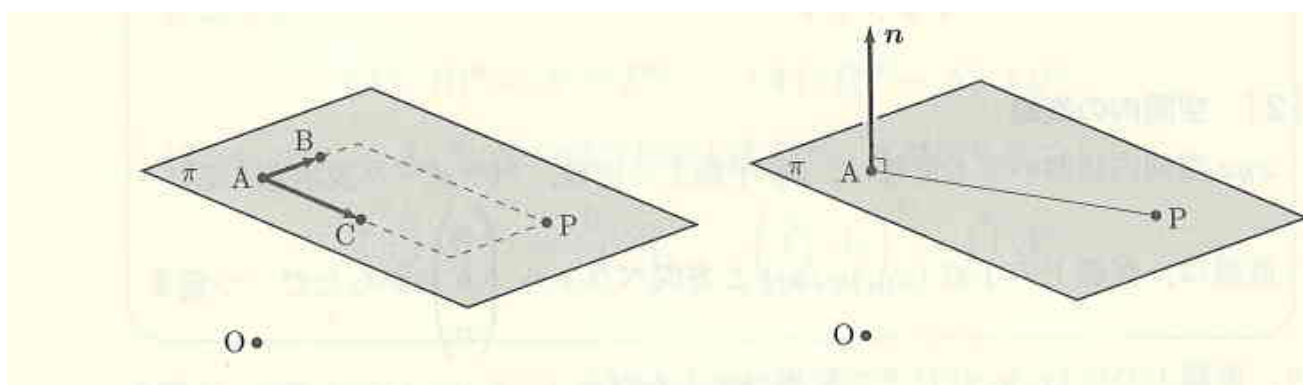
[3] 平面の方程式

$z = x - 2y + 3$ のような x, y に関する「一次関数」は平面を与える．一般に，2 変数関数は「曲面」を与える．そして，1 変数関数の微分係数が対応する曲線の接線の傾きを与えるように，2 変数関数 $z = f(x, y)$ の偏微分係数によって「接平面」を決めることができる．このように，平面は2 変数関数の例を与えるだけでなく，2 変数関数の解析において重要である．

空間内の平面 (π と呼ぶ) は，その上の同一直線上にはない異なる 3 点 A, B, C を指定すればただ一つに定まる．これは，平面上の 1 点 $A(x_0, y_0, z_0)$ と，ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ によって定まると言っても同じであり，平面上の点 $P(x, y, z)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad (s, t \in \mathbf{R})$$

という形で与えられる．下の左の図を参照．



また，平面 π と垂直なベクトル $\mathbf{n}$ を π の**法線ベクトル**と呼ぶ． $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると，

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \text{ は } \mathbf{n} \text{ と直交するので (上図の右を参照),}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

が成り立つ．これを**平面の方程式**という．

演習 0.3. (1) 点 $(1, 2, 3)$ を通り直線 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ に垂直な平面の方程式を求めよ．

(2) 点 $A(a, b, c)$ を通り，法線ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ である平面の方程式を求めよ．

(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上の点 $A(a, b, c)$ における接平面の方程式を求めよ．

演習 0.2 の解答. (1) 方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

よって、直線 ℓ のパラメータ表示は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R}).$

(2) $x - 1 = y - 2 = \frac{z - 3}{-2}$

演習 0.3 の解答. (1) 法線ベクトルは与えられた直線の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ をとればよい.

したがって、 $2(x - 1) + 3(y - 2) + 4(z - 3) = 0.$

注意. この形で平面の通る点と法線ベクトルが見えるので、これを解答の最終形として良い.

(2) $a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0$

(3) $a(x - a) + b(y - b) + c(z - c) = 0$ または、 $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$ より $ax + by + cz = r^2.$

球と接平面をイメージすることが重要である.