確率統計演習 No.6 解答例

6-1. (1) $a=-0.75, b=1.25$
(2) $\dfrac{40-m}{\sigma}=-0.75, \dfrac{72-m}{\sigma}=1.25$ より $m=52, \sigma=16$．よって，平均は 52，分散は $16^2=256$.

6-2. (1) S の平均は $600p$，分散は $600p(1-p)$ である．
(2) $T=\dfrac{S-600p}{\sqrt{600p(1-p)}}=\dfrac{\frac{S}{600}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{600}}}$ であり，$u=1.65, v=1.96$
(3) 信頼度 90%の場合は，(2) より

$$P\Big(-1.65<\frac{S-600p}{\sqrt{600p(1-p)}}<1.65\Big)=0.90$$

となる．調査結果も，この不等式をみたすと考えると，

$$-1.65\sqrt{600p(1-p)}<113-600p<1.65\sqrt{600p(1-p)}$$

または,

$$-1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{600}}<0.188-p<1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{600}}$$

という母比率 p に対する不等式を得る．$p \fallingdotseq 0.188$ であることを使って，右辺，左辺の p を 0.188 に置き換えると,

$$0.188-1.65\sqrt{\frac{0.188\cdot(1-0.188)}{600}}<p<0.188+1.65\sqrt{\frac{0.188\cdot(1-0.188)}{600}}$$

となり，$(0.162, 0.214)$ を得る．

信頼度 95%の場合は，同様に
$\Big(0.188-1.96\sqrt{\dfrac{0.188\cdot(1-0.188)}{600}}, 0.188+1.96\sqrt{\dfrac{0.188\cdot(1-0.188)}{600}}\Big)$ を計算して，$(0.157, 0.219)$.

6-3. $\dfrac{165}{300}=0.55$ をもとに考える．議論は前問とほぼ同様なので，省略する．

信頼度 95%の場合は，$\Big(0.55-1.96\sqrt{\dfrac{0.55\cdot(1-0.55)}{300}}, 0.55+1.96\sqrt{\dfrac{0.55\cdot(1-0.55)}{300}}\Big)$ を計算して，$(0.494, 0.606)$.

信頼度 99%の場合は，$\Big(0.55-2.58\sqrt{\dfrac{0.55\cdot(1-0.55)}{300}}, 0.55+2.58\sqrt{\dfrac{0.55\cdot(1-0.55)}{300}}\Big)$ を計算して，$(0.476, 0.624)$.

6-4. (1) 平均 m，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N\big(m, \frac{\sigma^2}{n}\big)$.
(2) 信頼度 90%の場合は，$\overline{X}_n$ を正規化すると正規分布表より

$$P\Big(-1.65<\frac{\overline{X}_n-m}{\sqrt{\sigma^2/n}}<1.65\Big)=0.90$$

となる．調査結果もこの不等式をみたすと考えると，$\sigma^2=150, n=20$ より母平均 m に対する不等式

$$-1.65\sqrt{\frac{150}{20}}<1280-m<1.65\sqrt{\frac{150}{20}} \quad \text{または} \quad 1280-1.65\sqrt{\frac{150}{20}}<m<1280+1.65\sqrt{\frac{150}{20}}$$

を得る．計算して，$(1275.5, 1284.5)$ を得る．

信頼度 95%の場合は，同様に
$\Big(1280-1.96\sqrt{\dfrac{150}{20}}, 1280+1.96\sqrt{\dfrac{150}{20}}\Big)$ を計算して，$(1274.6, 1285.4)$.

6-5. 母比率 p の信頼度 95%の信頼区間は，標本中の比率が p_0 であれば

$$\left(p_0 - 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}, p_0 + 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$$

であり，その幅は，$2 \times 1.96\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$ である．

$x(1-x) = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{1}{4}$ であり，$x = 1/2$ のとき等号が成り立つので，信頼区間の幅は $p_0 = 1/2$ のとき最大になり，これが 0.02 以下であればよい．つまり，

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} \leqq 0.02$$

であればよい．これから，$n \geqq \left(\dfrac{1.96}{0.02}\right)^2 = 9604$ となる．