

確率統計演習 No.5 解答例

5-1. (1) 二項分布表から,

$$0.1589 + 0.1702 + 0.1528 + 0.1174 + 0.0782 \doteq 0.678.$$

(2) $T_1 = \frac{S_1 - \frac{50}{8}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}}} = \frac{8 \cdot S_1 - 50}{\sqrt{50 \times 7}}$ が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとして, 半目の補正 (半整数補正, ヒストグラム補正) をして正規分布表を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned} P(5 \leq S_1 \leq 9) &= P(4.5 \leq S_1 \leq 9.5) = P\left(\frac{4.5 - \frac{50}{8}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}}} \leq \frac{S_1 - \frac{50}{8}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}}} \leq \frac{9.5 - \frac{50}{8}}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}}}\right) \\ &\doteq P(-0.75 \leq T_1 \leq 1.39) \doteq 0.2734 + 0.4177 \doteq 0.69. \end{aligned}$$

5-2. $T_2 = \frac{S_2 - \frac{100}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{S_2 - 50}{5}$ が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとして, 半目の補正をして正規分布表を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned} P(S_2 \leq 50.5) &= P\left(T_2 \leq \frac{50.5 - 50}{5}\right) = P(T_2 \leq 0.1) \doteq 0.5 + 0.0398 \doteq 0.54. \\ P(50.5 \leq S_2 \leq 55.5) &= P\left(\frac{50.5 - 50}{5} \leq T_2 \leq \frac{55.5 - 50}{5}\right) = P(0.1 \leq T_2 \leq 1.1) \\ &\doteq 0.3643 - 0.0398 \doteq 0.32. \\ P(S_2 \geq 55.5) &= P\left(T_2 \geq \frac{55.5 - 50}{5}\right) = P(T_2 \geq 1.1) \doteq 0.5 - 0.3643 \doteq 0.14. \end{aligned}$$

5-3. (1) $P(|X - m| < c\sigma) = P\left(\left|\frac{X - M}{\sigma}\right| < c\right) = 0.475 \times 2$ であり, $\frac{X - m}{\sigma}$ は標準正規分布に従うので, 正規分布表より $c = 1.96$.

(2) ヒント (ii) の変形をすると,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{50}\right) = P\left(\frac{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right|}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} < \frac{\frac{1}{50}}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) > 0.95$$

となる. ド・モワブル-ラプラスの定理を用いると, (1) より

$$\frac{\frac{1}{50}}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} > 1.96$$

であればよい.

$$\frac{1}{50} > 1.96 \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}, \quad \text{したがって, } \sqrt{n} > 1.96 \frac{\sqrt{5}}{6} \times 50$$

より, $n \geq 1334$.

5-4. (1) $\max\{X, Y\} \leq x$ とは, $X \leq x$ かつ $Y \leq x$ ということなので, X, Y の独立性から

$$F(x) = P(U \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) = x^2.$$

$\min\{X, Y\} \geq x$ とは, $X \geq x$ かつ $Y \geq x$ ということなので, X, Y の独立性から

$$G(x) = P(V \geq x) = P(X \geq x)P(Y \geq x) = (1 - x)^2.$$

(2) 確率密度は分布関数を微分すれば得られる :

$$f_U(x) = \frac{d}{dx}P(U \leq x) = 2x,$$

$$f_V(x) = \frac{d}{dx}P(V \leq x) = \frac{d}{dx}(1 - P(V \geq x)) = \frac{d}{dx}(1 - (1 - x)^2) = 2(1 - x).$$

(3) 平均の定義から, 次の積分を計算する :

$$E[U] = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3},$$

$$E[V] = \int_0^1 x \cdot 2(1 - x) dx = \frac{1}{3}.$$