

5-1. 面に 1 から 8 の数字が書かれた正八面体のサイコロを 50 回投げるとき, 8 の出る回数を S_1 とする. $5 \leq S_1 \leq 9$ の確率を

- (1) 二項分布表を用いて,
- (2) ド・モワブル-ラプラスの定理を用いて,

求めよ. (2 つの値が近いことを確認すること.)

5-2. コインを 100 回投げるとき, 表の回数を S_2 とする. 次の確率をド・モワブル-ラプラスの定理を用いて求めよ.

$$(1) P(S_2 \leq 50) \quad (2) P(51 \leq S_2 \leq 55) \quad (3) P(S_2 \geq 56)$$

ただし, (3) は (1),(2) の結果の合計を 1 から引くのではなく, (1),(2) と同様にド・モワブル-ラプラスの定理を用いて計算し, 3 つの結果の合計が 1 に近いことを確認すること.

5-3. (1) X を正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数とすると, $P(|X - m| < c\sigma) = 0.95$ をみたす定数 c の値を求めよ.

(2) S_n を二項分布 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ に従う確率変数とすると,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{50}\right) > 0.95$$

となるような n の範囲をド・モワブル-ラプラスの定理を用いて求めよ.

ヒント: (i) 大数の法則より, 左辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 1 に収束する.

(ii) ド・モワブル-ラプラスの定理 $\left[\frac{S_n - n/6}{\sqrt{n \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}} = \frac{S_n/n - 1/6}{\sqrt{\frac{1}{n} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}} \right]$ の確率分布が $N(0, 1)$ に収束する

が使えるように左辺を変形する.

5-4. X, Y を独立で, ともに $[0, 1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする:

$$P(0 \leq X \leq x) = P(0 \leq Y \leq x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$ とおくとき, 次に答えよ.

- (1) $F(x) = P(U \leq x)$, $G(x) = P(V \geq x)$, $0 \leq x \leq 1$ を求めよ.
- (2) U, V の確率密度 f_U, f_V を求めよ.
- (3) U, V の平均の値を求めよ.