

確率統計演習 No.4 解答例

4-1. (1) 正規分布表から,

$$(i) P(1 \leq T \leq 1.5) = 0.4332 - 0.3413 = 0.0919$$

$$(ii) P(-0.5 \leq T \leq 1) = 0.1915 + 0.3413 = 0.5328$$

$$(iii) P(T \geq 1.96) = 0.5 - 0.4750 = 0.0250$$

(2)  $\frac{X-10}{\sqrt{25}} = \frac{X-10}{5}$  が標準正規分布  $N(0,1)$  に従うので, 正規分布表を用いると次のようになる.

$$(i) P(5 \leq X \leq 20) = P\left(\frac{5-10}{5} \leq \frac{X-10}{5} \leq \frac{20-10}{5}\right) = P\left(-1 \leq \frac{X-10}{5} \leq 2\right) \\ = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

$$(ii) P(-4 \leq X \leq 2) = P\left(\frac{-4-10}{5} \leq \frac{X-10}{5} \leq \frac{2-10}{5}\right) = P\left(-2.8 \leq \frac{X-10}{5} \leq -1.6\right) \\ = 0.4974 - 0.4452 = 0.0522$$

$$(iii) P(X \geq 15) = P\left(\frac{X-10}{5} \geq \frac{15-10}{5}\right) = P\left(\frac{X-10}{5} \geq 1\right) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

4-2. (1)  $a = 0.5, b = 1.5$

(2)  $X$  を正規化して考えると,

$$P(X \geq 44) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{44-m}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$P(X \geq 52) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{52-m}{\sigma}\right) = 0.0668$$

より, (1) を用いて

$$\frac{44-m}{\sigma} = 0.5, \quad \frac{52-m}{\sigma} = 1.5$$

となる. この連立方程式を解けば,  $m = 40, \sigma = 8$  となるので, 平均は 40, 分散は  $8^2 = 64$  である.

**注意.** 分散を 8 と書いていないだろうか?

(3)  $Y$  を正規化して考えると, 正規分布表より

$$P(Y \leq 28) = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \leq \frac{28-m}{\sigma}\right) = 0.1056 = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \leq -1.25\right)$$

$$P(Y \geq 60) = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \geq \frac{60-m}{\sigma}\right) = 0.2266 = P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \geq 0.75\right)$$

となる. よって,

$$\frac{28-m}{\sigma} = -1.25, \quad \frac{60-m}{\sigma} = 0.75$$

となる. この連立方程式を解けば,  $m = 48, \sigma = 16$  となるので, 平均は 48, 分散は  $16^2 = 256$ .

4-3.  $Y$  の分布関数は,  $x \geq 0$  に対して  $F_Y(x) = \int_0^x f_Y(u)du$  であり, 条件から

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{1}{2}T^2 \leq x\right) = P\left(-\sqrt{2x} \leq T \leq \sqrt{2x}\right) \\ = \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2 \int_0^{\sqrt{2x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

となる. 従って,

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{2x})^2}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/2} e^{-x}.$$

4-4. (1)  $X, Y$  の独立性を用いると,

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= \sum_{r=0}^n P(X = r, Y = n - r) = \sum_{r=0}^n P(X = r)P(Y = n - r) \\ &= \sum_{r=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-r}}{(n-r)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^n \frac{n!}{r!(n-r)!} \lambda^r \mu^{n-r} \end{aligned}$$

となる。ただし、最後の変形で  $n!$  で割って、和の中で掛けている。よって、二項定理より

$$P(X + Y = n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}$$

となるので、 $X + Y$  は平均  $\lambda + \mu$  のポアソン分布に従う。

(2) (1) の結果を用いると、条件付確率の定義から、

$$\begin{aligned} P(X = r | X + Y = n) &= \frac{P(X = r \text{ かつ } X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = r, Y = n - r)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = r)P(Y = n - r)}{P(X + Y = n)} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-r}}{(n-r)!} \times \left( e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} \right)^{-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^r \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-r} \end{aligned}$$

となる。従って、条件  $X + Y = n$  のもとで  $X$  は二項分布  $B(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$  に従う。

4-5. ヒントに従って、部分積分を実行すると

$$\begin{aligned} E[T^2] &= 2 \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x \left( -e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[ -xe^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{x=0}^\infty + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

となる。最後の積分は、標準正規分布の確率密度の  $\mathbf{R}$  上の積分だから 1 である。