確率統計演習 No.4

2025 年 5 月 30 日 (金)

4-1. (1) T を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とするとき，次の確率の値を正規分布表を用いて求めよ.

(i) $P(1 \leqq T \leqq 1.5)$　(ii) $P(-0.5 \leqq T \leqq 1)$　(iii) $P(T \geqq 1.96)$

(2) X を正規分布 $N(10,25)$ に従う確率変数とするとき，次の確率の値を正規分布表を用いて求めよ.

(i) $P(5 \leqq X \leqq 20)$　(ii) $P(-4 \leqq X \leqq 2)$　(iii) $P(X \geqq 15)$

4-2. (1) T を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とするとき，

$$P(T \geqq a) = 0.3085 \qquad P(T \geqq b) = 0.0668$$

をみたす a, b の値を正規分布表から求めよ.
(2) X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数であり，

$$P(X \geqq 44) = 0.3085 \qquad P(X \geqq 52) = 0.0668$$

が成り立つとき，X の平均と分散の値を求めよ.
(3) Y が正規分布に従う確率変数であり，

$$P(Y \leqq 28) = 0.1056 \qquad P(Y \geqq 60) = 0.2266$$

が成り立つとき，Y の平均と分散の値を求めよ.

4-3. T を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とし，$Y = \dfrac{1}{2}T^2$ とおく．このとき，Y の分布関数 $F_Y(x) = P(Y \leqq x), x \geqq 0$ を積分で表し結果を微分することで，Y の確率密度 $f_Y(x)$ を求めよ.

4-4. X, Y を独立で，それぞれ平均 λ, μ のポアソン分布に従う確率変数とする.
(1) $P(X+Y=n), n = 0, 1, ...$ を求め，$X+Y$ の確率分布が何か書け.
（ヒント：$P(X+Y=n) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(X = r$ かつ $Y = n-r)$ を，仮定を用いて簡単にする.）
(2) n を自然数とするとき，条件付き確率 $P(X = r | X+Y = n), r = 0, 1, ..., n$ を求めよ．この $\{0, 1, ..., n\}$ 上の確率分布を $X+Y=n$ のもとでの X の確率分布という．この確率分布は何か.

4-5. T を標準正規分布に従う確率変数とするとき，T^2 の平均を

$$E[T^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

で定める．被積分関数は偶関数なので，

$$E[T^2] = 2\int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

となる．右辺を計算して，$E[T^2] = 1$ を示せ．ただし，$x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$ $(x \to \infty)$, $n = 0, 1, 2, ...$ は証明なしで用いてよい.（ヒント：$(e^{-\frac{x^2}{2}})' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ を用いて部分積分.）