確率統計演習 No.3 解答例

3-1. $E[X^2]=\int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)dx, \int_{\mathbf{R}} f(x)dx=1$ に注意すると,

$$\begin{aligned}V[X] &= \int_{\mathbf{R}} (x-m)^2 f(x)dx = \int_{\mathbf{R}} (x^2-2mx+m^2)f(x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)dx - 2m\int_{\mathbf{R}} xf(x)dx + m^2\int_{\mathbf{R}} f(x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x)dx - 2m\cdot m + m^2 = E[X^2]-m^2\end{aligned}$$

となる.

3-2. (i) 平均の定義から,

$$E[X]=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{b+a}{2}.$$

(ii) 前問の結果を用いるより定義から次のように計算する方が早い：$x-\frac{b+a}{2}=t$ と変数変換して,

$$V[X]=E\Big[\Big(X-\frac{b+a}{2}\Big)^2\Big]=\int_a^b\Big(x-\frac{b+a}{2}\Big)^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2dt=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3-3. (i) $P(X\geqq s)=\displaystyle\int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=\Big[-e^{-\lambda x}\Big]_{x=s}^\infty=e^{-\lambda s}.$
(ii) 条件付確率の定義と (i) から,

$$\begin{aligned}P(X\geqq s+t|X\geqq s) &= \frac{P(X\geqq s+t \text{ かつ } X\geqq s)}{P(X\geqq s)} \\ &= \frac{P(X\geqq s+t)}{P(X\geqq s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(X\geqq t)\end{aligned}$$

となる.
(iii) 部分積分より,

$$E[X]=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^\infty x(-e^{-\lambda x})'dx \quad = \Big[x(-e^{-\lambda x})\Big]_{x=0}^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}.$$

(iv) 積分が収束するためには $t<\lambda$ である必要があり，このとき

$$M(t)=\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda-t)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-t}.$$

(v) $M'(t)=\dfrac{\lambda}{(\lambda-t)^2}.$
(vi) $M'(t)$ をもう一度微分すると,

$$M''(t)=\frac{d}{dt}\int_0^\infty xe^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^\infty x^2e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

となるから,

$$M''(0)=\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=E[X^2]$$

が成り立つ．一方，(v) の両辺の微分を考えると，$M''(t)=\dfrac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$ となるから,

$$V[X]=M''(0)-(M'(0))^2=\frac{2\lambda}{\lambda^3}-\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

3-4. (i) まず,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \Big(-\frac{x-m}{\sigma^2} \Big)$$

となる．次に，関数の積の微分を実行して

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \Big(-\frac{x-m}{\sigma^2} \Big)^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \Big(-\frac{1}{\sigma^2} \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{(x-m)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

となる．よって，$f''(x) = 0$ となるのは，$(x-m)^2 = \sigma^2$ より $x = m \pm \sigma$ である．

$x < m - \sigma, x > m + \sigma$ であれば $f''(x) > 0$，$m - \sigma < x < m + \sigma$ であれば $f''(x) < 0$ であるから，$x = m \pm \sigma$ のとき変曲点となる．

(ii) $x = m$ において極大（最大），開区間 $(-\infty, m-\sigma), (m+\sigma, \infty)$ ではグラフは下に凸，$(m-\sigma, m+\sigma)$ ではグラフは上に凸であるように描く．教科書 51 ページを参照.