

3-1. X を f を密度関数とする連続型確率変数とし, X の平均 $E[X]$ を m とかく:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \quad E[X] = m = \int_{\mathbf{R}} xf(x)dx.$$

このとき, X の分散 $V[X] = E[(X - m)^2]$ に対して $V[X] = E[X^2] - m^2$ が成り立つことを示せ.

3-2. X を $[a, b]$ 上の一様分布に従う確率変数とする:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \quad (a \leq \alpha \leq \beta \leq b).$$

(i) X の平均 $E[X]$ を求めよ.

(ii) X の分散を求めよ.

3-3. λ を正の定数とし, X をパラメータ λ の指数分布に従う確率変数とする:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (0 \leq \alpha \leq \beta).$$

(i) $s \geq 0$ に対して $P(X \geq s)$ を求めよ.

(ii) $s, u \geq 0$ とするとき, $X \geq s$ が起きたとき $X \geq s + u$ が起こる (条件付) 確率 $P(X \geq s + u | X \geq s)$ が $(s$ に依らず) $P(X \geq u)$ に等しいことを示せ.

(iii) X の平均 $E[X]$ は, 積分

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

によって与えられる. $E[X]$ の値を求めよ.

(iv) X の積率母関数 $M(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$ を求めよ. $M(t)$ が有限である t の範囲を確認すること.

(v) $M'(t)$ を求めよ.

積率母関数を微分をすると

$$M'(t) = \int_0^{\infty} x e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

となるから, $M'(0)$ は平均である. (iii) の結果との一致を確認せよ.

(vi) $M''(0) = E[X^2]$ を示し, X の分散 $V[X]$ を求めよ.

3-4. m を実数, σ を正の定数とすると, 平均 m , 分散 σ^2 をもつ正規分布の密度関数 f は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

によって与えられる. $f(x)$ は $x = m$ において唯一の極値をとり, 極大かつ最大である.

(i) 2階導関数 f'' を計算することにより, 曲線 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ.

(ii) 曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け. 凹凸も調べること.