

確率統計演習 No.2 解答例

2-1. (i) 二項定理の両辺を微分すると

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^n r {}_nC_r x^{r-1} = {}_nC_1 + \cdots + r {}_nC_r x^{r-1} + \cdots + n {}_nC_n x^{n-1}$$

である. $x=1$ とおけば結論を得る.

(ii) 二項定理の両辺の 0 から 1 までの定積分を考えると,

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = {}_nC_0 + {}_nC_1 \int_0^1 x dx + \cdots + {}_nC_r \int_0^1 x^r dx + \cdots + {}_nC_n \int_0^1 x^n dx$$

となるので,

$${}_nC_0 + \frac{1}{2} {}_nC_1 + \cdots + \frac{1}{r+1} {}_nC_r + \cdots + \frac{1}{n+1} {}_nC_n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

2-2. 次のように和を 3 つに分ける:

$$\begin{aligned} E[(X-m)^2] &= \sum_{i=1}^N (a_i - m)^2 p_i = \sum_{i=1}^N ((a_i)^2 - 2ma_i + m^2) p_i \\ &= \sum_{i=1}^N (a_i)^2 p_i - 2m \sum_{i=1}^N a_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^N p_i. \end{aligned}$$

ここで, $m = \sum_{i=1}^N a_i p_i$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ に注意すると,

$$V[X] = E[(X-m)^2] = E[X^2] - 2m^2 + m^2 = E[X^2] - m^2.$$

2-3. (i) 無限級数の和の公式を用いると,

$$P(X \geq s) = \sum_{r=s}^{\infty} P(X=r) = \sum_{r=s}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^r \frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^s}{1 - \frac{5}{6}} = \left(\frac{5}{6}\right)^s.$$

(ii) 条件付確率の定義に戻り (i) の結果を用いて, 次のように示す:

$$\begin{aligned} P(X \geq \ell + r \mid X \geq \ell) &= \frac{P(X \geq \ell + r \text{ かつ } X \geq \ell)}{P(X \geq \ell)} \\ &= \frac{P(X \geq \ell + r)}{P(X \geq \ell)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{\ell+r}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{\ell}} = \left(\frac{5}{6}\right)^r = P(X \geq r). \end{aligned}$$

$X \geq \ell$ はサイコロを ℓ 回振って 6 が出ないという確率である. ℓ 回振ったあとは ℓ 回までと独立にサイコロは振るので, それ以降の事象は ℓ 回までに關する事象と独立である. よって, 左辺の条件付確率は ℓ 回振って 6 が出ないときにさらに r 回振っても 6 が出ない確率だから, ℓ には依存しない.

(iii) ずらして引き算をすると,

$$E[X] - \frac{5}{6} E[X] = \left(\frac{5}{6}\right) \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^r \frac{1}{6} + \cdots = \frac{\left(\frac{5}{6}\right) \frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$$

となり, $\frac{1}{6} E[X] = \frac{5}{6}$ である. よって, $E[X] = 5$.

- (iv) $Q(s) = \sum_{r=0}^{\infty} s^r \left(\frac{5}{6}\right)^r \frac{1}{6} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{5s}{6}\right)^r \frac{1}{6} = \frac{1}{6-5s}.$
(v) $M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{tr} \left(\frac{5}{6}\right)^r \frac{1}{6} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{5e^t}{6}\right)^r \frac{1}{6} = \frac{1}{6-5e^t}.$
(vi) 導関数は,

$$Q'(s) = 5(6-5s)^{-2}, \quad M'(t) = 5e^t(6-5e^t)^{-2}$$

となる. $Q'(1) = M'(0) = 5$ が成り立ち (i) で求めた $E[X]$ が得られる.

(vii) もう一度項別微分をすると

$$Q''(s) = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)s^{r-2}P(X=r), \quad M''(t) = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 e^{rt}P(X=r)$$

となることから, $Q''(1) = E[X(X-1)], M''(0) = E[X^2]$ となる.

(iv) の結果から,

$$Q''(s) = 2 \cdot 5^2(6-5s)^{-3}, \quad M''(t) = 5e^t(6-5e^t)^{-2} + 2 \cdot 5^2(e^t)^2(6-5e^t)^{-3}$$

だから, $Q''(1) = 50 = E[X^2] - E[X], M''(0) = 5 + 50 = E[X^2]$ であり, どちらからでも $E[X^2] = 55$ となる. 従って,

$$V[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = 55 - 5^2 = 30.$$

2-4. 場合の数を考えると,

$$\begin{aligned} P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3, X_4 = n_4) \\ = {}_n C_{n_1} \cdot {}_{n-n_1} C_{n_2} \cdot {}_{n-n_1-n_2} C_{n_3} \cdot {}_{n-n_1-n_2-n_3} C_{n_4} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4} \end{aligned}$$

である. ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ を用いて整理すると,

$$\begin{aligned} P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3, X_4 = n_4) \\ = \frac{n!}{(n_1)!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{(n_2)!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{(n_3)!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2-n_3)!}{(n_4)!(n-n_1-n_2-n_3-n_4)!} \\ \quad \times p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4} \\ = \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!(n_3)!(n_4)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} p_4^{n_4} \end{aligned}$$

となる. なお, $0! = 1$ は便宜上の定義である.

2-5. (1) 二項定理より, $Q(s) = \sum_{r=0}^n s^r {}_n C_r p^r (1-p)^{n-r} = \sum_{r=0}^n {}_n C_r (ps)^r (1-p)^{n-r} = (ps+1-p)^n.$

(2) $Q(s)$ の定義から $Q'(s) = \sum_{r=0}^n r {}_n C_r p^r s^{r-1} (1-p)^{n-r}$ だから, $Q'(1) = \sum_{r=0}^n r {}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$ となる. よって, $Q'(1)$ は S_n の平均である. 一方, (1) より $Q'(s) = np(ps+1-p)^{n-1}$ であり $Q'(1) = np$ となり, S_n の平均が求まる.

(3) $Q(s)$ の定義から $Q''(s) = \sum_{r=0}^n r(r-1) {}_n C_r p^r s^{r-2} (1-p)^{n-r}$ だから, $Q''(1) = \sum_{r=0}^n r(r-1) {}_n C_r p^r (1-p)^{n-r}$ となる. よって, $Q''(1)$ は $S_n(S_n-1)$ の平均である. 一方, (1) より $Q''(s) = n(n-1)p^2(ps+1-p)^{n-2}$ だから, $Q''(1) = n(n-1)p^2$ である. よって, 期待値の記号を用いると $Q''(1) = E[S_n(S_n-1)] = E[(S_n)^2] - E[S_n] = n(n-1)p^2$ となる. よって, $E[(S_n)^2] = n(n-1)p^2 + np$ となり, S_n の分散が $V[S_n] = E[(S_n)^2] - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p)$ と求まる.