解析学 II 演習．問題６解答例

注意　以下はあくまで解答例で，解答は一つとは限らない．誤植も含め，解答に誤りがあるかもしれないので，各自で検証すること．**コメント，質問は大歓迎です．**

問題 6.1. (1) $|5x| < 1$ なら，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \frac{1}{1-5x}$ となる．収束半径は $\dfrac{1}{5}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{n^5} = 1$ だから，ダランベールの判定法より収束半径は 1 である．

(3) $2^n x^{3n} = (2x^3)^n$ と変形すると，等比級数の和の公式より $|2x^3| < 1$ であれば無限級数は $\dfrac{1}{1-(\sqrt[3]{2}x)^3}$ に収束する．収束半径は $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ だから，コーシーの判定法より収束半径は ∞ である．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\Big(\frac{(3n)!}{(n!)^3}\Big)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} = 27$ だから，ダランベールの判定法より収束半径は $\dfrac{1}{27}$ である．

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big|\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\Big(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big)^{-1}\Big| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$ だから，ダランベールの判定法より収束半径は ∞ である．

問題 6.2. (1) 収束半径は 1 である．

(2) $|x| < 1$ ならば，べき級数展開が一様収束するので

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

(3) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x.$

(4) (2),(3) より $\displaystyle\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ を得る．両辺とも，$x \to 1$ のとき収束するので，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

である．**注意．交代級数の収束に関しては講義で述べた．**

問題 6.3. (1) 2　(2) 2 (3) 部分積分より 1.

問題 6.4. (1) $a \neq 1$ のとき，$\displaystyle\int_\delta^1 x^{-a} dx = \Big[\frac{1}{1-a} x^{1-a}\Big]_{x=\delta}^1 = \frac{1}{1-a}(1-\delta^{1-a}).$

$a = 1$ のとき，$\displaystyle\int_\delta^1 \frac{1}{x} dx = \Big[\log x\Big]_{x=\delta}^1 = -\log \delta.$

(2) $a = 1$ のときは発散する．$a \neq 1$ のとき，δ^{1-a} が $\delta \to 0$ のとき収束するのは $1 - a > 0$，つまり $a < 1$ のときで極限値は $\dfrac{1}{1-a}$.

問題 6.5. (1) $a \neq 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^b x^{-a}dx = \left[\frac{1}{1-a}x^{1-a}\right]_{x=1}^b = \frac{1}{1-a}(b^{1-a}-1)$.
$a = 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_{x=1}^b = \log b$.
(2) $a = 1$ のときは発散する．$a \neq 1$ のとき，b^{1-a} が $b \to \infty$ のとき収束するのは $1-a < 0$，つまり $a > 1$ のときで極限値は $\dfrac{-1}{1-a} = \dfrac{1}{a-1}$.

問題 6.6. (1) $\log x = t$ とおいて置換積分をすると，$\dfrac{dx}{x} = dt$ より

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^a}dx = \int_1^\infty \frac{1}{t^a}dt$$

となる．問題 6.5(2) よりこの広義積分は $a > 1$ のとき収束する．
(2) $x \geqq 1$ のとき $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \geqq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ が成り立つ．問題 6.5(2) よりこの広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ は発散するので，(2) の広義積分も発散する．
(3) $x \geqq 2$ に対して $\dfrac{1}{x^{3/2}-1} \leqq \dfrac{2}{x^{3/2}}$ が成り立つ．問題 6.5(2) より $\displaystyle\int_2^\infty \frac{2}{x^{3/2}}dx$ は収束するので，$\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}-1}dx$ は収束する．