解析学 II 演習．問題６

2025 年 6 月 27 日

注意． 極限や級数に関して学んだ事柄を用いてよいが，解答に何を使ったかを明記すること．

例． ・$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は，$|x|<1$ のとき $\dfrac{1}{1-x}$ に収束し，$|x| \geqq 1$ のとき発散する．

・$a>1$ ならば，任意の $k \in \mathbf{R}$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する．

・比較判定法，優級数定理，ダランベールの判定法，コーシーの判定法

問題 6.1. 次のべき級数の収束半径を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^5 x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{3n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} x^n$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

問題 6.2. $\dfrac{1}{1+x^2}$ のべき級数展開 $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ を考える．

(1) べき級数の収束半径 ρ を求めよ．

(2) $|x|<\rho$ なる x に対し，$\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt$ をべき級数の形で求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$ を求めよ．

講義で証明した交代級数の収束に関する定理より，(2) で求めたべき級数は $x=\rho$ で収束する．

(4) $\displaystyle\int_0^{\rho} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ の値を求め，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$ を示せ．

問題 6.3. 次の広義積分の値を求めよ．ただし，$xe^{-x} \to 0\ (x \to \infty)$ は証明なしで用いてよい．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ (3) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$

問題 6.4. (1) $a>0, 0<\delta<1$ のとき，$\displaystyle\int_{\delta}^1 \frac{1}{x^a} dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\delta\to+0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x^a} dx$ が存在するための正の定数 a に対する条件とそのときの極限値を求めよ．

問題 6.5. (1) $a>0, b>1$ のとき，$\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^a} dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^a} dx$ が存在するための正の定数 a に対する条件とそのときの極限値を求めよ．

問題 6.6. 次の広義積分の収束，発散の判定をせよ．ただし，$a>0$ とする．なお，上の問題の結果を用いてよいが，どの問題を用いたかを明記すること．

(1) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^a} dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$ (3) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}-1} dx$