解析学 II 演習．問題５解答例

注意　以下はあくまで解答例で，解答は一つとは限らない．誤植も含め，解答に誤りがあるかもしれないので，各自で検証すること．**コメント，質問は大歓迎です．**

問題 5.1. (1) すべての n に対して $\dfrac{1}{3n^2+1} < \dfrac{1}{3n^2}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2}$ は収束するので，優級数定理より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}$ も収束する．

(2) すべての n に対して $\dfrac{1}{3n^2-1} \leqq \dfrac{1}{2n^2}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ は収束するので，優級数定理より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-1}$ も収束する．**注意：** $\dfrac{1}{2n^2}$ 以外に役に立つ数列は多くある．

(3) すべての n に対して $\dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{1}{2}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は収束するので，優級数定理より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ も収束する．

(4) すべての n に対して $e^{-n+\frac{23}{n}} \leqq e^{23}e^{-n}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{23}e^{-n}$ は収束するので，優級数定理より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n+\frac{23}{n}}$ も収束する．

問題 5.2. (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big) \to \frac{3}{4}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} = 0 < 1$ だから，コーシーの判定法より収束する．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\Big(0.99\big(\frac{n+1}{n}\big)^{99}\Big) = 0.99 < 1$ だから，ダランベールの判定法より収束する．

(4) $0 \leqq 1+\log n \leqq n$ より，$\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{1+\log n}$ である．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するから，比較判定法により無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\log n}$ は発散する．または，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ より十分大きい n に対して $\dfrac{\log n}{n} < 1$ が成り立つ (すべての自然数 n に対してこの不等式が成り立つことを示して，用いるのもよい)．$\dfrac{1}{n+1} \leqq \dfrac{1}{1+\log n}$ であり，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ は発散するから，比較判定法により無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\log n}$ は発散する．
注意：最初の比較対象を見つけることがポイントである．

問題 5.3. (1) $n \geqq 5$ とすると，二項定理より $(1+h)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r h^r > {}_nC_5 h^5$ が成り立つ．したがって，

$$0 < \frac{n^4}{(1+h)^n} < \frac{n^4}{{}_nC_5 h^5} = \frac{5!}{h^5}\frac{n^4}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

が成り立つので，$\dfrac{n^4}{(1+h)^n} = \dfrac{n^4}{a^n} \to 0$ となる．

(2) (1) より，$n \geqq N$ ならば $\dfrac{n^4}{a^n} < 1$，よって $\dfrac{n^2}{a^n} < \dfrac{1}{n^2}$ をみたす自然数 N が存在する．
(**注意：**収束の定義を「$\varepsilon = 1$」として用いている．)

(3) $\dfrac{a}{b}=1+h$ とおくと，$n \geqq 3$ に対して $(1+h)^n > {}_nC_3 h^3$ だから，

$$0 < \frac{n^2}{(1+h)^n} < \frac{n^2}{{}_nC_3 h^3} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．したがって，(2) と同様に，$n \geqq N'$ であれば $\dfrac{n^2}{(1+h)^n} < 1$ となるような自然数 N' が存在し，このとき $n^2 < (1+h)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ である．

(4) (3) より，$n \geqq N'$ ならば $\dfrac{n^2}{a^n} < \dfrac{1}{b^n}$ が成り立つ．$b > 1$ より $\displaystyle\sum_{n=N'}^{\infty} \frac{1}{b^n}$ は収束するので，優級数定理より $\displaystyle\sum_{n=N'}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$ も収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$ は収束する．

コメント：N, N' は a, b に依存して決まるが，そこを細かく言わないで収束だけを示すところが議論のメリットの 1 つだと思う．

問題 5.4. (1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ は絶対収束する．和の順序を変えて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(2) 示すべきことは，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ が ∞ に発散することである．このために，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ に注意する．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ は発散する．

問題 5.5. (1) $s_{2n+1} - s_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2(2n+1)-1} + \dfrac{(-1)^{2n-1}}{2 \cdot 2n - 1} = \dfrac{1}{4n+1} - \dfrac{1}{4n-1} < 0.$

(2) $s_{2n+2} - s_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+2)-1} + \dfrac{(-1)^{2n}}{2(2n+1)-1} = \dfrac{-1}{4n+3} + \dfrac{1}{4n+1} > 0.$

(3) $s_2 < s_4 < s_3 < s_1$

(4) $s_{2n} - s_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \dfrac{-1}{2n-1} < 0$ であり，

$$s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} < s_{2n-1} < \cdots < s_3 < s_1.$$

(5) $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は，(1) より単調減少であり，(4) より $s_{2n-1} > s_2$ で下に有界であるので，実数の連続性から収束する．$\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加かつ $s_{2n} < s_1$ より上に有界であるので，実数の連続性から収束する．

(6) $s_{2n-1} \to \alpha, s_{2n} \to \beta$ とすると，$s_{2n} \leqq \beta \leqq \alpha \leqq s_{2n-1}$ が成り立つ．さらに，$s_{2n-1} - s_{2n} = \dfrac{1}{4n-1} \to 0$ だから $\beta = \alpha$ が成り立つ．