解析学 II 演習．問題５

2025 年 6 月 13 日

注意． 極限や級数に関して学んだ事柄はすべて用いてよいが， **何を用いたかを解答に明記すること**.

例． ・$a > 1$ ならば，任意の $k \in \mathbf{R}$ に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する． $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する．

・比較判定法，優級数定理，ダランベールの判定法，コーシーの判定法

問題 5.1. 次の無限級数の収束，発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-1}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n+\frac{23}{n}}$

問題 5.2. 次の無限級数の収束，発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots$ (2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0.99)^n n^{99}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\log n}$ ((4) のヒント：$\log n$ を何かと比較して，比較判定法を用いる)

問題 5.3. $a > 1$ のとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$ が収束することを 2 通りの議論により示す．

(1) $a = 1 + h$ とおき，$a^n = (1+h)^n$ に対して二項定理を用いて，$\displaystyle\frac{n^4}{a^n} \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ．

(2) $n \geqq N$ ならば $\displaystyle\frac{n^2}{a^n} < \frac{1}{n^2}$ となる自然数 N が存在することを示せ．
（このことと $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することから，結論を得る．）

(3) $1 < b < a$ とすると，$n \geqq N$ ならば $n^2 < \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$，よって $\dfrac{n^2}{a^n} < \left(\dfrac{1}{b}\right)^n$ が成り立つような自然数 N が存在することを示せ．（ヒント：$\dfrac{a}{b} = 1 + h$ とおいて，$\dfrac{n^2}{(a/b)^n} = \dfrac{n^2}{(1+h)^n}$ と書くと，(1) と同様．）

(4) (3) を用いて，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}$ の収束を示せ．

問題 5.4. 次の問に答えよ．

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$ が絶対収束することを示せ．また，
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を示せ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ は絶対収束しないことを示せ．

問題は裏にもう 1 題ある．

問題 5.5. 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ を考える．部分和を s_n とする：$\displaystyle s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

(1) $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少であることを示せ.

(2) $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加であることを示せ.

(3) s_1, s_2, s_3, s_4 を大きさの順に並べよ.

(4) $s_{2n} - s_{2n-1} < 0$ を確認し，$s_1, s_2, ..., s_{2n}$ を大きさの順に並べよ.

(5) $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$，$\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ の収束を示せ.

(6) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ の収束を示せ.