

解析学 II 演習．問題 4 解答例

注意 以下はあくまで解答例で，解答は一つとは限らない．誤植も含め，解答に誤りがあるかもしれないので，各自で検証すること．コメント，質問は大歓迎です．

問題 4.1. (1) $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフを描き，3 つの量で面積が与えられる領域を図示すればよい．
(2) (1) の右の不等式を用いると，次が分かる．

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ &> \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx - \log n \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx - \log n = \log(n+1) - \log n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right). \end{aligned}$$

(3) 定義から $a_n - a_{n+1}$ を n で表し，最後に (1) の左の不等式を用いると

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \log(n+1)\right) \\ &= \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{n+1} > 0. \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．

(4) $\{a_n\}$ は単調減少で，すべての n について $a_n > 0$ ，したがって下に有界だから，実数の連続性より収束する．極限をオイラーの定数という．詳細はウキペディアなどで検索して下さい．

問題 4.2. (1) $f(1) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = c$ より $f(\frac{1}{2}) = \frac{c}{2}$ である．次に，仮定を 2 度用いると，

$$f(1) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) = f(\frac{1}{3}) + \left(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3})\right) = 3f(\frac{1}{3})$$

となる．よって， $f(\frac{1}{3}) = \frac{c}{3}$ となる． $f(\frac{2}{3}) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}c$ である．

(2) $f(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}c$ (3) $f(\frac{k}{m}) = \frac{k}{m}c$

(4) x に収束する有理数列 $\{a_n\}$ を考える．(3) より $f(a_n) = ca_n$ である． $a_n \rightarrow x$ より， f が連続関数であることから

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n c) = cx$$

となる．最初の等式で f の連続性を用いていることに注意せよ．

問題 4.3. $f(x) = \log g(x)$ とおくと, $f(1) = 1$ であり,

$$f(x+y) = \log g(x+y) = \log(g(x)g(y)) = \log g(x) + \log g(y) = f(x) + f(y)$$

となるので, $f(x)$ は前問の仮定を $c = 1$ としてみたす連続関数である. よって,

$$f(x) = \log g(x) = x, \quad \text{よって, } g(x) = e^x \quad \text{となる.}$$

問題 4.4. すべての $n \geq 2$ に対して $f_n(0) = 0$ だから, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ である.

$0 < x \leq 1$ に対しては, $\frac{2}{N} < x$ となる自然数 N が存在する. $n \geq N$ ならば $\frac{2}{n} < x$ だから $f_n(x) = 0$ が成り立つ. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ である.

注意. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ であるが, $f_n(\frac{1}{n}) = n$ であり $\int_0^2 f_n(x) dx = \frac{2}{n} \times n \times \frac{1}{2} = 1$ である.

つまり, $\int_0^2 f_n(x) dx$ は $\int_0^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$ に 収束しない.

問題 4.5. (1) p, q を整数として, $x = \frac{p}{q}$ とする. $q > 0$ として一般性を失わない.

$n \geq q$ であれば $n!x = n!\frac{p}{q}$ は整数となるので, $\cos(n!\pi x) = 1$ または $\cos(n!\pi x) = -1$ である. よって, このとき $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$ となるので, $n \geq q$ ならば

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} \right) = 1$ が成り立つ.

(2) x が無理数であれば, 任意の n に対して $|\cos(n!\pi x)| < 1$ であり,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} = 0$$

が成り立つ. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} \right) = 0$ が成り立つ.

(3) a が有理数とすると, 任意の $\delta > 0$ に対し, 区間 $(a - \delta, a + \delta)$ に無理数 x が存在する. $|f(a) - f(x)| = 1$ より f は a で不連続である. a が無理数とすると, 任意の $\delta > 0$ に対し, 区間 $(a - \delta, a + \delta)$ に有理数 x が存在する. $|f(a) - f(x)| = 1$ より f は a で不連続である.

したがって, a が有理数でも無理数でも, f は a で不連続である.

注意. a のどんなに小さな近傍をとっても, その近傍内に f の値が 1 違う点が存在することが話の本質である.