

解析学 II 演習．問題 4

2025 年 5 月 30 日

問題 4.1. 数列 $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ を $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$ で定める．

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) のグラフを描き, $\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ を示せ．

(言うまでもなく, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \log(k+1) - \log k$, $\int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$ である.)

(2) (1) の右の不等式を用いて, $a_n > \log \frac{n+1}{n}$ ($n = 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ．

(これから, $a_n > 0$ が分かる)

(3) (1) の左の不等式を用いて, $\{a_n\}$ が単調減少であることを示せ．

(ヒント: まず, $a_n - a_{n+1}$ を書き下せ．)

(4) $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき収束することを示せ．

問題 4.2. c を正の定数とする．また, f を $f(1) = c$ であり, すべての x, y に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

をみたす $\mathbf{R}$ 上の連続関数とする．

(1) $f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(\frac{2}{3})$ を求めよ．

(2) m を自然数とすると, $f(\frac{1}{m})$ を求めよ．結果のみでよい．

(3) k, m を自然数とすると, $f(\frac{k}{m})$ を求めよ．結果のみでよい．

(4) f の連続性を用いて, 実数 x に対して $f(x)$ を求めよ．

問題 4.3. g を正の値をもち, $g(1) = e$ であり, すべての x, y に対して

$$g(x+y) = g(x)g(y)$$

をみたす $\mathbf{R}$ 上の連続関数とする．前問の結果を用いて, $g(x)$ を求めよ．

問題 4.4. $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & (\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \leq x \leq 2) \end{cases}$ で定まる $[0, 2]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ を考える．この

とき, すべての $0 \leq x \leq 2$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

(ヒント: $f_n(0) = 0$ だから $x > 0$ のときを考えればよい．ただし, 解答にはこのことをコメントすること．

また, $y = f_n(x)$ のグラフを描けば, 主張を理解することは難しくない．)

コメント. $\int_0^2 f_n(x) dx = 1$ であり, $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx \neq \int_0^2 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx = 0$ である．つまり, 積分と極限操作の順序を入れ替えることが一般にはできない．こういうことがあるので数学が進歩するのである．

(問題は裏に続く．)

問題 4.5. (1) x が有理数のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m} \right) = 1$ を示せ.

(2) x が無理数のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^{2m} \right) = 0$ を示せ.

(3) 関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数のとき}) \\ 1 & (x \text{ が有理数のとき}) \end{cases}$ で定める. f がすべての点 $a \in \mathbf{R}$ で不連続である

ことを, ε - δ 論法を用いて証明せよ.

ヒント: (1) $x = \frac{p}{q}$ (ただし, p, q は整数) と書く. n が大きいとき $n!x$ は?

(2) x が無理数ならば $n!x$ が整数になることはない.

(3) a が無理数ならば a のどんな近傍にも有理数が存在することを用いる.