解析学 II 演習（担当：松本）問題３解答例

注意　以下はあくまで解答例で，解答は一つとは限らない．誤植も含め，解答に誤りがあるかもしれないので，各自で検証すること．**コメント，質問は大歓迎です．**

問題 3.1. (1) $x < \tan x$ $(0 < x \leqq 1)$ より，$f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$ $(0 < x \leqq 1)$ となり，$f(x)$ は単調減少．

(2) 省略．

(3) $\sup_{n \geqq 1} a_n = 1$, $\inf_{n \geqq 1} a_n = \sin 1$．(4) $\max_{n \geqq 1} a_n$ は存在しない．$\min_{n \geqq 1} a_n = \sin 1$．

問題 3.2. (1) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$,　(2) $\limsup_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\liminf_{n\to\infty} b_n = -\infty$,
(3) $\limsup_{n\to\infty} c_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} c_n = -1$.

問題 3.3.　(1) $\sup_{n \geqq 2k} a_n = 3 + \dfrac{1}{2k}$,　$\inf_{n \geqq 2k} a_n = 0$

(2) $\sup_{n \geqq 2k-1} a_n = 3 + \dfrac{1}{2k}$,　$\inf_{n \geqq 2k-1} a_n = 0$

(3) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 3$,　$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$

問題 3.4.　(1) $(0, 1)$ に含まれる有理数の全体．このように考えると，有理数全体が加算集合である，つまり番号を付けることができることが分かる．

(2) $0 < a_n < 1$ より，数列 $\{a_n\}$ は（上にも下にも）有界である．上極限および下極限は，それぞれ

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

である．部分列 $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots\right\}$ は 1 に収束する．部分列 $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots\right\}$ は 0 に収束する．

(3) 例えば,

$$\left\{\frac{6}{10}, \frac{69}{100}, \frac{693}{1000}, \frac{6931}{10000}, \frac{69314}{100000}, \frac{693147}{1000000}, \dots\right\}$$

などである．

問題 3.5. (1) (i) 単調減少 (ii) $a_m \leqq \overline{a_k}$，$b_m \leqq \overline{b_k}$ (iii) 存在する．

(2) $a, b > 0$ として，$a_n = (-1)^n a, b_n = (-1)^{n-1} b$ など．実際，$\limsup_{n\to\infty} a_n = a, \limsup_{n\to\infty} b_n = b, \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = |a - b|$ である．

(3) (1) を参考にして，「不等号の向き」を変えたりして，自分で考えて欲しい．

まず,

$$\underline{a_k} = \inf_{n \geqq k} a_n, \quad \underline{b_k} = \inf_{n \geqq k} b_n, \quad \underline{c_k} = \inf_{n \geqq k}(a_n + b_n)$$

とおく．$\{\underline{a_k}\}, \{\underline{b_k}\}$ は単調増加な数列であり，$\{a_n\}, \{b_n\}$ の有界性から有限な極限値を持つ．言うまでもなく，$m \geqq k$ のとき，a_m と $\underline{a_k}$，b_m と $\underline{b_k}$ を比較すると，

(a)　$a_m \geqq \underline{a_k}$,　$b_m \geqq \underline{b_k}$

が成り立つ．一方，数列 $\{a_n + b_n\}$ を考えると，下限 $\inf_{n \geqq k}(a_n + b_n)$ の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

(b) $\quad \underline{c_k} + \varepsilon > a_m + b_m \quad$ を満たす $m \geqq k$ が存在する．

したがって，(a) と (b) より $\underline{c_k} + \varepsilon \geqq \underline{a_k} + \underline{b_k}$ であり，$k \to \infty$ として

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) + \varepsilon \geqq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意だから，結論を得る．

問題 3.6. (1) $a_{2n} = 1$ より，$\{a_{2n}\}$ は収束する部分列である．

(2) $a_{4n+1} = (4n+1)\cos\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ より，$\{a_{4n+1}\}$ は収束する部分列である．

問題 3.7. (1) $a_n > 4\ (n = 2, 3, \ldots)$ より，

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(4 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(4 + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{a_n a_{n-1}} < \frac{|a_n - a_{n-1}|}{16}$$

が成り立つ．

(2) (1) より $k \geqq 3$ に対して，$|a_k - a_{k-1}| < \dfrac{|a_2 - a_1|}{16^{k-2}}$ だから，$n > m$ に対して

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\leqq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\ &< \frac{|a_2 - a_1|}{16^{n-2}} + \frac{|a_2 - a_1|}{16^{n-3}} + \cdots + \frac{|a_2 - a_1|}{16^{m-1}} \\ &< \frac{1}{16^{m-1}}\left(1 + \frac{1}{16} + \cdots\right)|a_2 - a_1|\end{aligned}$$

となる．

よって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して N を

$$\frac{1}{16^{N-1}}\left(1 + \frac{1}{16} + \cdots\right)|a_2 - a_1| < \varepsilon$$

となるようにとると，$n > m \geqq N$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となる．よって，数列 $\{a_n\}$ はコーシー列であり，従って収束する．

(3) $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ とすると，$a = 4 + \dfrac{1}{a}$ が成り立つ[*1]．これを解いて $a = 2 \pm \sqrt{5}$ を得る．従って，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2 + \sqrt{5}$ である．

[*1] ここで，収束する数列について，和・差・積・商の極限が，極限の和・差・積・商に等しいことを用いている．