解析学 II 演習．問題３

2025 年 5 月 16 日

問題 3.1. 一般項が $a_n = n\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{\sin(1/n)}{1/n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(0 < x \leqq 1)$ とおくと，$f(x)$ が単調減少であることを示せ．
（**ヒント**：$0 < x < \pi/2$ に対して $x < \tan x$ が成り立つことは使ってよい．）

(2) $y = f(x)$ のグラフ上に $(1, a_1), \left(\dfrac{1}{2}, a_2\right), \left(\dfrac{1}{3}, a_3\right)$ をプロットせよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ に注意して，$\displaystyle\sup_{n\geqq 1} a_n, \inf_{n\geqq 1} a_n$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\max_{n\geqq 1} a_n, \min_{n\geqq 1} a_n$ は存在するか．存在するなら，その値を求めよ．

問題 3.2. 次の数列の上極限 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}$，下極限 $\displaystyle\liminf_{n\to\infty}$ を求めよ．

(1) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$　　(2) $b_n = (-1)^n n$　　(3) $c_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}$

問題 3.3. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 3 + \dfrac{1}{n} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

で定める．

(1) $\displaystyle\sup_{n\geqq 2k} a_n$ と $\displaystyle\inf_{n\geqq 2k} a_n$ を求めよ．（ヒント: $\{a_{2k}, a_{2k+1}, ...\}$ を書き下せ．）

(2) $\displaystyle\sup_{n\geqq 2k-1} a_n$ と $\displaystyle\inf_{n\geqq 2k-1} a_n$ を求めよ．（ヒント: $\{a_{2k-1}, a_{2k}, ...\}$ を書き下せ．）

(3) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

問題 3.4. 数列

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \ldots\right\}$$

を考える．一般項は，$a_{\frac{m(m-1)}{2}+k} = \dfrac{k}{m+1}$ $(k = 1, \ldots, m\,; m = 1, 2, \ldots)$ で与えられる．

(1) 集合として $\{a_n\}$ は何を表しているか．

(2) 上極限および下極限を求め，それらに収束する部分列を作れ．

(3) $\log 2 = 0.693147\cdots$ に収束する部分列をひとつつくれ．必要なら，実数が 10 進数展開できることを用いてよい．

（問題は裏に続く）

問題 3.5. 有界な数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対し，次を示したい．

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(1) 次の下線部に適用な，数式，文章などを入れて，証明を完成させよ．

まず，

$$\overline{a_k} = \sup_{n\geqq k} a_n, \quad \overline{b_k} = \sup_{n\geqq k} b_n, \quad \overline{c_k} = \sup_{n\geqq k}(a_n + b_n)$$

とおく．$\{\overline{a_k}\}, \{\overline{b_k}\}$ は(i)______________な数列であり，$\{a_n\}, \{b_n\}$ の有界性から有限な極限値を持つ．言うまでもなく，$m \geqq k$ のとき，a_m と $\overline{a_k}$，b_m と $\overline{b_k}$ を比較すると，

(a) (ii)________________________

が成り立つ．一方，数列 $\{a_n + b_n\}$ を考えると，上限 $\sup_{n\geqq k}(a_n + b_n)$ の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

(b) $\overline{c_k} - \varepsilon < a_m + b_m$ を満たす $m \geqq k$ が(iii)________________.

したがって，(a) と (b) より $\overline{c_k} - \varepsilon \leqq \overline{a_k} + \overline{b_k}$ であり，$k \to \infty$ として

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) - \varepsilon \leqq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意だから，結論を得る．

(2) 等号が成り立たない例をつくれ．

(3) $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$ を示せ．

問題 3.6. 以下の数列 $\{a_n\}$ について，収束する部分列をひとつ求めよ．

(1) $a_n = \cos n\pi$ (2) $a_n = n\cos\dfrac{n\pi}{2}$

問題 3.7. 連分数

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 4 + \frac{1}{4}, \quad a_3 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}, \quad a_4 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}, \ldots$$

$$a_{n+1} = 4 + \frac{1}{a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) $|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{|a_n - a_{n-1}|}{16}$ $(n \geqq 2)$ を示せ．
（**ヒント**：帰納法を用いる必要はない．$a_n > 4$ $(n = 2, 3, ...)$ を用いればよい．）

(2) $\{a_n\}$ がコーシー列であることを示せ．

(3) (2) より $\{a_n\}$ は収束する．このことを認めて，極限値 $4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ を求めよ．