

解析学 II 演習．問題 2 解答例

注意 以下はあくまで解答例で，解答は一つとは限らない．誤植も含め，解答に誤りがあるかもしれないので，各自で検証すること．コメント，質問，大歓迎です．

問題 2.1. (i) $|b_n - k\alpha| < \varepsilon$ (ii) $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ (iii) $n \geq N$ ならば $|b_n - k\alpha| (= |ka_n - k\alpha|) < \varepsilon$

問題 2.2. (i) $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ (ii) $|a_{2n-1} - \alpha| < \varepsilon$ (iii) $|a_{2n} - \alpha| < \varepsilon$

(iv) $2N_1 - 1, 2N_2$ よりも大きい整数，または（格好良く書くなら） $N = \max\{2N_1 - 1, 2N_2\}$

(v) $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ （「 $n \geq N$ ならば」を忘れていないか！）

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
問題 2.3.	max	なし	なし	1	$\frac{3}{2}$	なし
	min	1	なし	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{3}$
	sup	∞	∞	1	$\frac{3}{2}$	1
	inf	1	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{3}$

問題 2.4. (1) $a_n < a_{n+1}$ を数学的帰納法により示す． $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) は明らかであろう．

まず， $a_2 = \sqrt{2 \times \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ より $n = 1$ のときに成り立つ．

次に， $a_k < a_{k+1}, k = 1, \dots, n$ を仮定して $a_{n+1} < a_{n+2}$ を示す．これは，数学的帰納法の仮定の $k = n$ の場合より $a_{n+1} - a_n > 0$ または $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ だから，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \sqrt{2a_{n+1}} - \sqrt{2a_n} = \frac{2(a_{n+1} - a_n)}{\sqrt{2a_{n+1}} + \sqrt{2a_n}} > 0$$

または

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{2a_{n+1}}}{\sqrt{2a_n}} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} > 1$$

となることから分かる．

よって，数学的帰納法より，すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して $a_n < a_{n+1}$ が成り立つ．

(2) $a_n < 2, n = 1, 2, \dots$ を数学的帰納法によって示す．

まず， $n = 1$ のときは $a_1 = \sqrt{2}$ という問題の仮定から正しい．

次に， $a_k < 2, k = 1, \dots, n$ を仮定して $a_{n+1} < 2$ を示す．これは，仮定の $k = n$ の場合 $a_n < 2$ を用いて

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \times 2} = 2$$

となることから分かる．

よって，数学的帰納法より，すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して $a_n < 2$ が成り立つ．

注意． 帰納法は，今後よく用いるので，考え方が分かるように丁寧に書いた．帰納法の仮定については，今回の問題では $k = n$ の場合しか用いる必要はなくこれを書けばよいが，ここに書いた形の仮定を用いないといけない場合がある．一度よく読んで，理解して欲しい．

(3) (1), (2) および実数の連続性から a_n は収束する. 極限を λ とすると, 漸化式で $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\lambda = \sqrt{2\lambda} \quad \text{よって,} \quad \lambda(\lambda - 2) = 0$$

が成り立つ. (1) より $\lambda > \sqrt{2}$ だから $\lambda = 2$ となる.

問題 2.5. (1) $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

(2) $y = x^{-2}$ のグラフを描き, a_n と右辺が面積となる領域を図示すると直ぐに分かる.

(3) $\{a_n\}$ は単調増加である. (2) から $a_n \leq 2$ が分かるので $\{a_n\}$ は上に有界である. したがって, 実数の連続性よりある実数に収束する.

注意. 極限は $\frac{\pi^2}{6}$ という驚くべき値である. この証明には別の話題を学習する必要がある. 講義の最後に紹介できればいいと考えている.

問題 2.6. 前問と同じようにグラフを描いて考える. 省略する.

発展問題の解答は省略する. それぞれ, すべての n について

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n < \cdots < a_2 < a_1$$

$$s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} < s_{2n-1} < \cdots < s_3 < s_1$$

が成り立つことがポイントである.

これから, 例えば $\{b_n\}$ が単調増加であり, $b_n \leq a_1$ がすべての n に対して成り立つので $\{b_n\}$ が上に有界であることが分かり, 実数の連続性から $\{b_n\}$ が収束することが分かる. $\{a_n\}$ の収束も, 単調減少で下に有界であることから示される. それぞれの極限がみたす方程式が漸化式から得られるので, 極限値の一致を証明できる.

解答を詳しく書いてみることを強く勧めます.