解析学 II 演習．問題２

2025 年 5 月 2 日

問題 2.1. $k \neq 0$ を実定数とする．数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき α に収束するとき，$b_n = ka_n$ で定義される数列 $\{b_n\}$ が $k\alpha$ に収束することを，ε-N 論法を用いて証明する．下線部に適当な文章，数式などを入れて証明を完成させよ．

（第 1 段）示すべきことを ε-N 論法で書くと，
任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して，$n \geqq N$ ならば(i)____________________が成り立つことである．

（第 2 段）仮定より，第 1 段の $\varepsilon > 0$ に対して，$n \geqq N_1$ ならば(ii)____________________が成り立つような自然数 N_1 が存在する．

（第 3 段）したがって，$N = N_1$ とすると，(iii)__________ならば__________が成り立つ．

ヒント：第 2 段では，$\dfrac{\varepsilon}{|k|}$ を用いるとよい．当然，(iii) は (i) の繰り返しに近い．

問題 2.2. 数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{a_{2n-1}\}$ と数列 $\{a_{2n}\}$ が同じ値 α に収束すると仮定する．このとき，もとの数列 $\{a_n\}$ も α に収束することを，ε-N 論法を用いて証明する．下線部に適当な文章，数式などを入れて証明を完成させよ．ただし，(ii) は a_{2n-1} に関すること，(iii) は a_{2n} に関することである．

（第 1 段）示すべきことは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して，$n \geqq N$ ならば（n の偶奇にかかわらず）(i)____________________が成り立つことである．

（第 2 段）仮定より，第 1 段の $\varepsilon > 0$ に対して，$n \geqq N_1$ ならば(ii)____________________が成り立つような自然数 N_1，$n \geqq N_2$ ならば(iii)____________________が成り立つような自然数 N_2 が存在する．

（第 3 段）よって，N を(iv)____________________とすると，(v)____________________が成り立つ．

ヒント：(iv) は，(ii) と (iii) が同時に成り立つように定める．なお，下線の長さは解答に関係ない．

問題 2.3. 以下の集合について，最大値，最小値は存在するか．存在するなら，その値を書け．また，上限，下限を求めよ．

(1) $\mathbf{N} = \{1, 2, ...\}$　　(2) $(0, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > 0\}$　　(3) $\left\{ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \,|\, n \in \mathbf{N} \right\}$

(4) $\left\{ \dfrac{n}{3n-7} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$　　(5) $\left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$

ヒント：(4),(5) は $\dfrac{1}{3} + \boxed{}$，　$1 + \boxed{}$ の形に変形すると分かりやすい．

(問題は裏に続く)

問題 2.4. 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}\,(n = 1, 2, \ldots)$ で定める．

(1) $\{a_n\}$ は単調増加数列であることを示せ．

(2) $\{a_n\}$ は上に有界であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

ヒント：(1)，(2) は数学的帰納法による．(2) は (3) を先に考えると自然に上限が見つかる．ただし，(1) と (2) があって初めて (3) の解答ができる．

問題 2.5. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ とする．

(1) $k \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx$ を求めよ．

(2) $a_n \leqq 1 + \displaystyle\int_{1}^{n} \frac{1}{x^2}\,dx$ を示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ．

問題 2.6. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とするとき，$a_n \to \infty\ (n \to \infty)$ を示せ．
ヒント：前問と同様に，a_n と定積分を比較する．

次は，必須とはしないが，是非トライしてほしい問題である．単調性などを信じて a_n, b_n, s_n を数直線上にプロットすると，様子が分かる．最初の問題はヒントを付けて，2022 年度の定期試験の問題とした．

発展問題. 正の一般項をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

によって定まり，$0 < b_1 < a_1$ と仮定する．このとき，$\{a_n\}, \{b_n\}$ が同じ値に収束することを次の手順で示せ．

(1) $b_n < a_n\ (n = 1, 2, ...)$ を示す．

(2) $\{a_n\}$ が単調減少，$\{b_n\}$ が単調増加であることを示す．

(3) $\{a_n\}$ が下に有界，$\{b_n\}$ が上に有界であることを示す．

(4) 極限値の一致を示す．

発展問題. $s_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とおく．

(1) $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少，$\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(2) $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界，$\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ が収束することを示せ．(ちなみに，極限は $\log 2$ である．)