

解析学 II 演習．問題 1 解答例

注意 以下はあくまで解答例で，解答は一つとは限らない．誤植も含め，解答に誤りがあるかもしれないので，各自で検証すること．コメント，質問を大歓迎します．

問題 1.1. (1) $\frac{1}{2}$ に収束する． (2) ∞ に発散する． (3) $a > 0$ のとき 0 に収束し， $a = 0$ のとき 1 に収束し， $a < 0$ のとき ∞ に発散する． (4) 発散（振動）する． (5) 0 に収束する．

問題 1.2. (1) $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2$ と変形する．これは， $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \rightarrow e$ より e^2 に収束する．
 (2) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$ と変形する． $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \rightarrow e$ ， $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \rightarrow 1$ より， $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e$ が分かる．
 (3) $\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{-2}$ と変形すると， e への収束が分かる．

問題 1.3. (2) のみ正しい．(1),(3) とともに， $a_n = n^2, b_n = n$ など，発散の「早さ」が異なる数列を考えれば反例となる．他にも多数ある．

問題 1.4. $n > \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log 2}$

問題 1.5. (1) $h > 0$ だから， $n \geq 3$ ならば，

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \dots \\ &> \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3. \end{aligned}$$

(2) (1) より $0 < \frac{n^2}{a^n} < \frac{6}{h^3} \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$ である． $\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} \rightarrow 0$ より $\frac{n^2}{a^n} \rightarrow 0$ である．

(3) $n \geq k+1$ ならば $a^n = (1+h)^n > {}_nC_{k+1}h^{k+1}$ である．よって，

$$(\#) \quad 0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{{}_nC_{k+1}} \frac{1}{h^{k+1}}$$

が成り立つ．

$$\frac{n^k}{{}_nC_{k+1}} = \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)/(k+1)!} = (k+1)! \times \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}$$

であり，右辺の分母は n について $k+1$ 次の多項式だから $\frac{n^k}{{}_nC_{k+1}} \rightarrow 0$ となる．よって，(＃) の右辺が 0 に収束するので， $\frac{n^k}{a^n}$ も 0 に収束する．

問題 1.6. (1) $\frac{a^n}{n!} = \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{N+1} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \leq \frac{a^N}{N!} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{n}$

(2) (1) より $0 < \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^{N+1}}{N!} \cdot \frac{1}{n}$ である． $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ より， $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ である．