数学演習 B 問題 (解析 1B) No.5

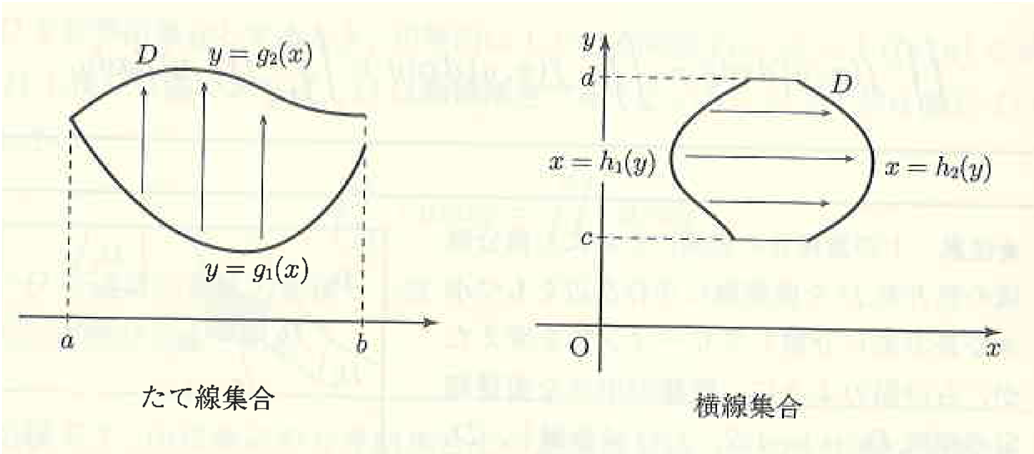
2025 年 12 月 8 日

5-1. 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{[0,2]\times[0,1]} e^{3x+2y}dxdy$ (2) $\displaystyle\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x+y)dxdy$ (3) $\displaystyle\iint_{[0,4]\times[0,1]} (x+y)^2dxdy$

---

x の関数 $g_1(x), g_2(x)$ $(g_1(x) \leqq g_2(x)$ とする)，y の関数 $h_1(y), h_2(y)$ $(h_1(y) \leqq h_2(y)$ とする) を用いて，$\{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\}$ の形で表示される $\mathbf{R}^2$ の部分集合を $\boxed{\text{たて線集合}}$ (左図)，$\{(x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\}$ の形で表示される集合を $\boxed{\text{横線集合}}$ (右図) という．



5-2. (1) 次の集合のたて線集合，横線集合としての表示を，それぞれ両方行い，たて線集合は左図，横線集合は右図のように，矢印を数本書いて図示せよ．

(i) D_1：x 軸と直線 $y=x$，$x=1$ で囲まれた集合 (境界も含む)

(ii) D_2：曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた集合 (境界も含む)

(2) 次の重積分の値を，(1) を用いて 2 通りの手順で求め，結果が一致することを確かめよ．

(i) $\displaystyle\iint_{D_1} ydxdy$ (ii) $\displaystyle\iint_{D_2} ydxdy$

5-3. 積分領域のたて線集合または横線集合としての表示を行い，それを上の図のように図示して重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} (x+y)\,dxdy$ ただし，D_1 は曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ によって囲まれた部分

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} (x+y)\,dxdy$ ただし，D_2 は 3 直線 $y=x, y=-x, y=1$ によって囲まれた部分

5-4. 積分領域のたて線集合または横線集合としての表示を行い，それを上の図のように図示して重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_{0\leqq y\leqq x\leqq 1} e^{x^2}dxdy$ (2) $\displaystyle\iint_{0\leqq x\leqq y\leqq\sqrt{\pi}} \sin(y^2)dxdy$

5-5. 自然数 n に対して $I(n)=\displaystyle\iint_{0\leqq y\leqq x\leqq n} e^{-x-y}dxdy$ とおくとき，$I(n)$ を n を用いて表し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)$ の値を求めよ．

5-6. $0<a<1$ をみたす実数 a に対して D_a を $\{(x,y)|a \leqq y \leqq 1, 0 \leqq x \leqq y\}$ で定まる領域とするとき，$J(a)=\displaystyle\iint_{D_a} \left(\frac{x}{y}\right)^4 dxdy$ を a を用いて表し $\displaystyle\lim_{a\to+0} J(a)$ の値を求めよ．