数学演習 B 問題（解析）略解　No.4

4-1. (1) $\dfrac{f_x}{f} = \dfrac{y}{x}$ より $f_x = yx^{y-1}$．$\dfrac{f_y}{f} = \log x$ より $f_y = x^y \log x$.
(2) $y^x = 3^2 + 2 \cdot 3^1(x-3) + 3^2 \log 3 \cdot (y-2) + R_2 = 9 + 6(x-3) + 9\log 3 \cdot (y-2) + R_2$
(3) $3.01^{2.02} \fallingdotseq 9 + 6(3.01-3) + 9\log 3(2.02-2) \fallingdotseq 9.26$

4-2. (1) $f_x = 4a^4x^3 - 4ay = 4a(a^3x^3 - y)$，$f_y = -4ax + 4y^3 = 4(y^3 - ax)$ である．$y = a^3x^3$ を $y^3 - ax = 0$ に代入すると，

$$(a^3x^3)^3 - ax = ax(a^4x^4-1)(a^4x^4+1) = ax(ax-1)(ax+1)(a^2x^2+1)(a^4x^4+1) = 0$$

となるので，$f_x = f_y = 0$ となるのは $(x,y) = (0,0), (\frac{1}{a}, 1), (-\frac{1}{a}, -1)$ の 3 点である．
(2) $f_{xx} = 12a^4x^2$，$f_{xy} = -4a$，$f_{yy} = 12y^2$ である．
(i) $(x,y) = (0,0)$ のときは，

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(-8axy) + R_3.$$

(ii) $(x,y) = (\frac{1}{a}, 1)$ のときは，

$$f(x,y) = f(\frac{1}{a},1) + \frac{1}{2}\Big(12a^2(x-\frac{1}{a})^2 - 8a(x-\frac{1}{a})(y-1) + 12(y-1)^2\Big) + R_3.$$

(iii) $(x,y) = (-\frac{1}{a}, -1)$ のときは，

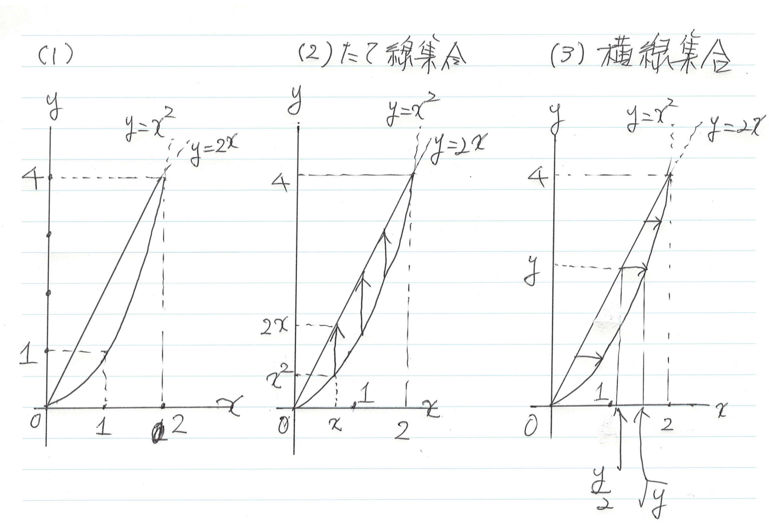
$$f(x,y) = f(-\frac{1}{a},-1) + \frac{1}{2}\Big(12a^2(x+\frac{1}{a})^2 - 8a(x+\frac{1}{a})(y+1) + 12(y+1)^2\Big) + R_3.$$

(3) (i)$(x,y) = (0,0)$ は鞍点である．
(ii) $(x,y) = (\frac{1}{a}, 1)$ のときは，$h^2 + k^2 \neq 0$ であるすべての実数 h, k に対して

$$f_{xx}(\frac{1}{a},1)h^2 + 2f_{xy}(\frac{1}{a},1)hk + f_{yy}(\frac{1}{a},1)k^2 = 12a^2h^2 - 8ahk + 12k^2 = 12a^2\Big(h - \frac{k}{3a}\Big)^2 + \frac{32}{3}k^2 > 0$$

となるから，f は $(\frac{1}{a}, 1)$ で極小値 -2 をとる．
(3) $(x,y) = (-\frac{1}{a}, -1)$ のときも同様に極小値 -2 をとる．

4-3.



(2) $\{(x,y) | 0 \leqq x \leqq 2, x^2 \leqq y \leqq 2x\}$　(3) $\{(x,y) | 0 \leqq y \leqq 4, \frac{y}{2} \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$
(4) $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx$ および $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})dy$ を計算する．いずれの場合も $\dfrac{4}{3}$ となる．

4-4. $f(x,y)=(s-x)(s-y)(x+y-s)$ とおくと，$f_x=(s-y)(2s-2x-y)$，$f_y=(s-x)(2s-x-2y)$ となる．
注意． x で偏微分する際は，$f_x=(s-y)\times\dfrac{\partial}{\partial x}\Big((s-x)(x+y-s)\Big)$ と考えるとよい．y で偏微分する際も同様．

今考えている (x,y) の範囲で $f_x=f_y=0$ となるのは，$x=y=\dfrac{2s}{3}$ のときである．また，$f_{xx}=-2(s-y)$，$f_{xy}=-3s+2(x+y)$，$f_{yy}=-2(s-x)$ だから，h,k の少なくとも一方が 0 でないなら

$$\begin{aligned}f_{xx}\Big(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3}\Big)h^2+2f_{xy}\Big(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3}\Big)hk+f_{yy}\Big(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3}\Big)k^2&=-\frac{2}{3}sh^2-2\cdot\frac{1}{3}shk-\frac{2}{3}sk^2\\&=-\frac{2}{3}s\Big\{\Big(h+\frac{1}{2}k\Big)^2+\frac{3}{4}k^2\Big\}<0\end{aligned}$$

となる．したがって，$f(x,y)$ は $x=y=\dfrac{2s}{3}$ のとき極大である．このとき，$x=y=z$ となり三角形は正三角形で，面積は $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となる．

考えている領域に境界を加えた有界閉集合上で f は非負連続であり，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となるのは $x=y=\frac{2s}{3}$ のときのみである．境界上では $f=0$ なので領域の内部で最大値を取ることになり，ただ一つの極大値が最大値である．

4-5. (1) 1 階偏導関数は,

$$z_x=2(\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}},\qquad z_y=2(\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot\frac{-1}{2\sqrt{y}}=-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}.$$

したがって，(p,q,r) における接平面の方程式は

$$z=r-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}(x-p)-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}(y-q).$$

(2) (1) で求めた接平面の方程式の両辺を $\sqrt{r}$ で割ると,

$$\frac{z}{\sqrt{r}}=\sqrt{r}-\frac{1}{\sqrt{p}}(x-p)-\frac{1}{\sqrt{q}}(y-q)$$

となり，x,y の項を移項すると

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{z}{\sqrt{r}}=\sqrt{r}+\sqrt{p}+\sqrt{q}=\sqrt{a}$$

となる．したがって，P, Q, R の座標は $(\sqrt{pa},0,0),(0,\sqrt{qa},0),(0,0,\sqrt{ra})$ であるから,

$$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}+\mathrm{OR}=\sqrt{pa}+\sqrt{qa}+\sqrt{ra}=(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})\sqrt{a}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a.$$