数学演習 B 問題（解析）　No.4

2025 年 11 月 17 日

4-1. $f(x,y) = x^y$ $(x > 0, y \in \mathbf{R})$ とおく．

(1) $\log f(x,y) = y \log x$ の両辺を偏微分して (対数微分)，f_x, f_y を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の $(x,y) = (3,2)$ における一次までのテイラー展開を求めよ．ただし，剰余項は R_2 と書いておけばよい．

(3) (2) を利用して $3.01^{2.02}$ の近似値を小数点以下第 2 位まで求めよ．ただし，$\log 3 \fallingdotseq 1.1$ として計算せよ．

4-2. $f(x,y) = a^4x^4 - 4axy + y^4$ とおく．ただし，a は正の定数とする．

(1) $f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0$ をみたす (x,y) を求めよ．

(2) (1) で求めた点における $f(x,y)$ の二次までのテイラー展開を求めよ．

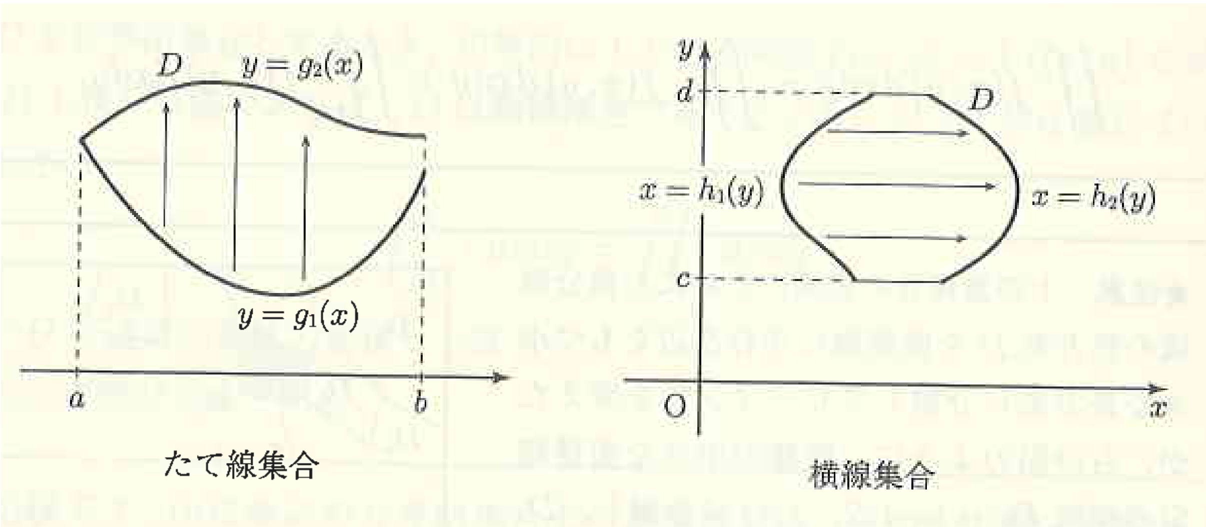
(3) f の極値を求めよ．

ただし,「極値を求める」とは,「極値をとる点とその点における値」および「極大極小の区別」を求めることである．

---

x の関数 $g_1(x), g_2(x)$ $(g_1(x) \leqq g_2(x)$ とする)，y の関数 $h_1(y), h_2(y)$ $(h_1(y) \leqq h_2(y)$ とする) に対して，$\{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\}$ の形で表示される $\mathbf{R}^2$ の部分集合を $\boxed{\text{たて線集合}}$ (左図)，$\{(x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\}$ の形で表示される集合を $\boxed{\text{横線集合}}$ (右図) という．

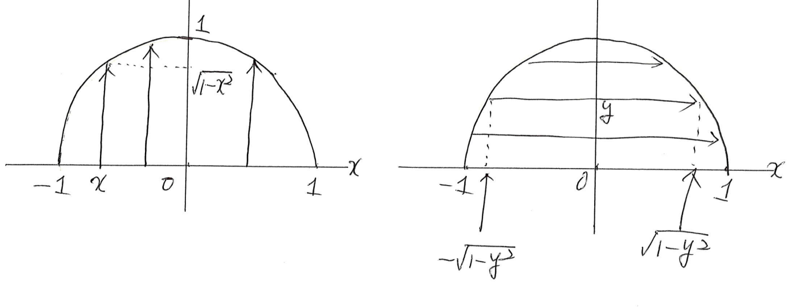
今後の重積分の計算において重要である．



例えば，原点中心半径 1 の円の $y \geqq 0$ の部分は，

$\{(x,y) | -1 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ とたて線集合として書けるし（下の左の図），

$\{(x,y) | 0 \leqq y \leqq 1, -\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}\}$ と横線集合の形でも書ける（下の右の図）．



4-3. xy 平面の第 1 象限内で，直線 $y=2x$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域を D とする．
(1) D を図示せよ．ただし，領域の内部に **斜線などは引かず**，境界を太く書いて明示すること．
(2) D をたて線集合の形の式および図（表の図のようにたての矢印を 2，3 本入れる）で表せ．
(3) D を横線集合の形の式および図（表の図のように横の矢印を 2，3 本入れる）で表せ．
(4) (2)，(3) のそれぞれを用いて D の面積を求め，結果が一致することを確認せよ．

上の 3 題を解いてから，以下の 2 題に取り組むこと．

4-4. 周の長さが一定 ($2s$ とする) の三角形の面積の最大値とそのときの形を求めよ．なお，三辺の長さを x, y, z とすると $(x+y+z=2s)$，三角形の面積が

$$S=\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}=\sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$$

となることがヘロンの公式として知られているので，この公式を用いること．また，
(i) $x+y>z=2s-(x+y)$ より $x+y>s$,
(ii) $x+z>y$ つまり $x+(2s-x-y)>y$ より $y<s$,
(iii) $y+z>x$ つまり $y+(2s-x-y)>x$ より $x<s$
であるので，$x, y>0$ はこれらの不等式をみたす範囲で考える．
ヒント：$f(x,y)=(s-x)(s-y)(x+y-s)$ に対する極値問題を考える．

4-5. $a>0$ を正の定数とし，曲面 $z=(\sqrt{a}-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ (ただし，$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \sqrt{a}$ で定まる領域上で考える) または $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ を考える．
(1) この曲面上の点 (p, q, r) における接平面の方程式を求めよ．
(2) (1) で求めた接平面と x 軸，y 軸，z 軸との交点を $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ とするとき，3 点と原点 O との距離の和 $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}+\mathrm{OR}$ がつねに a であることを示せ．