数学演習 B 問題（解析）略解　No.3

3-1. (1) $f_x = -\dfrac{k}{x^2y}$, $f_y = -\dfrac{k}{xy^2}$ より，$f_x(a,b) = -\dfrac{k}{a^2b}$, $f_y(a,b) = -\dfrac{k}{ab^2}$ である．さらに，$f(a,b) = \dfrac{k}{ab}$ だから，

$$f(x,y) = \frac{k}{ab} - \frac{k}{a^2b}(x-a) - \frac{k}{ab^2}(y-b) + R_2.$$

(2) $z = \dfrac{k}{ab} - \dfrac{k}{a^2b}(x-a) - \dfrac{k}{ab^2}(y-b)$，または $\dfrac{k}{a^2b}x + \dfrac{k}{ab^2}y + z = \dfrac{3k}{ab}$.

(3) 接平面と x 軸との交点は $(3a,0,0)$，y 軸との交点は $(0,3b,0)$，z 軸との交点は $(0,0,\dfrac{3k}{ab})$ である．したがって，四面体 (三角すい) の体積は $3a\cdot 3b\cdot \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3k}{ab}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{9k}{2}$.

3-2. (1) $\log f(x,y) = x\log y$ より，$\dfrac{f_x}{f} = \log y$, $\dfrac{f_y}{f} = \dfrac{x}{y}$ となる．よって，$f_x = y^x\log y$, $f_y = xy^{x-1}$

(2) $f(x,y) = 2 + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) + R_2 = 2 + 2\log 2\cdot(x-1) + (y-2) + R_2$.

(3) $2 + 2\cdot 0.693\cdot(1.02-1) + (2.01-2) = 2.038$.

3-3. (1) 1 階偏導関数は

$$f_x = 2(x^2+y^2)2x - 2\cdot 2x = 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 4x(x^2+y^2-1),$$
$$f_y = 2(x^2+y^2)2y + 2\cdot 2y = 4x^2y + 4y^3 + 4y = 4y(x^2+y^2+1).$$

$f_y = 0$ となるのは $y=0$ のときのみであり，さらに $f_x = 0$ となるのは $x=0$，$x=1$，$x=-1$ のときである．

したがって，$f_x = f_y = 0$ となるのは，$(0,0),(1,0),(-1,0)$.

(2) 2 階偏導関数は

$$f_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4x^2 + 12y^2 + 4.$$

(i) $(x,y) = (0,0)$ のまわりのテイラー展開は,

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{2}\Big(-4x^2 + 4y^2\Big) + R_3 = -2(x^2-y^2) + R_3.$$

(ii) $(x,y) = (1,0)$ のまわりのテイラー展開は,

$$f(x,y) = f(1,0) + \frac{1}{2}\Big(8(x-1)^2 + 8y^2\Big) + R_3 = -1 + 4(x-1)^2 + 4y^2 + R_3.$$

(iii) $(x,y) = (-1,0)$ のまわりのテイラー展開は,

$$f(x,y) = f(-1,0) + \frac{1}{2}\Big(8(x+1)^2 + 8y^2\Big) + R_3 = -1 + 4(x+1)^2 + 4y^2 + R_3.$$

(3) (i) $(x,y) = (0,0)$ は鞍点である．

(ii) $(x,y) = (1,0)$ において極小値 -1 をとる．

(iii) $(x,y) = (-1,0)$ において極小値 -1 をとる．

3-4. (1) $f(x,y)=xy(3a-x-y)$.
(2) f の 1 階偏導関数は

$$f_x=3ay-2xy-y^2=y(3a-2x-y),\qquad f_y=3ax-x^2-2xy=x(3a-x-2y).$$

$x,y>0$ のとき $f_x=f_y=0$ となるのは，$x=y=a$ のときのみである．

f の 2 階偏導関数は

$$f_{xx}=-2y,\quad f_{xy}=3a-2x-2y,\quad f_{yy}=-2x$$

だから，f の $(x,y)=(a,a)$ の周りのテイラー展開は，

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(a,a)+\frac{1}{2}\Big(-2a(x-a)^2-2\cdot a(x-a)(y-a)-2a(y-a)^2\Big)+R_3\\&=a^3+a\Big(-(x-a)^2-(x-a)(y-a)-(y-a)^2\Big)+R_3\end{aligned}$$

となる．さらに，$h=x-a,k=y-a$ とおくと，

$$-h^2-hk-k^2=-\Big(h+\frac{1}{2}k\Big)^2-\frac{3}{4}k^2<0\quad((h,k)\neq(0,0))$$

であるから，f は (a,a) においてただ一つの極大値 a^3 をとる．

3-5. (1) $f(x,y)=2\Big(xy+x\dfrac{a^3}{xy}+y\dfrac{a^3}{xy}\Big)=2\Big(xy+\dfrac{a^3}{y}+\dfrac{a^3}{x}\Big)$.
(2) $f_x=2\Big(y-\dfrac{a^3}{x^2}\Big)$，$f_y=2\Big(x-\dfrac{a^3}{y^2}\Big)$ となるので，$f_x=f_y=0$ となるのは，$x^2y=a^3,xy^2=a^3$ のときである．これから，$x=y=a$ となる．

さらに，$f_{xx}=4\dfrac{a^3}{x^3}$，$f_{xy}=2$，$f_{yy}=4\dfrac{a^3}{y^3}$ だから，$f_{xx}(a,a)=4$，$f_{xy}(a,a)=2$，$f_{yy}(a,a)=4$ となるので f の $(x,y)=(a,a)$ のまわりの 2 次までのテイラー展開は

$$f(x,y)=f(a,a)+\Big\{2(x-a)^2+2(x-a)(y-a)+2(y-a)^2\Big\}+R_3$$

となる．$x-a=h,y-a=k$ とおくと，

$$2h^2+2hk+2k^2=2\Big(h+\frac{1}{2}k\Big)^2+\frac{3}{2}k^2>0\quad((h,k)\neq(0,0))$$

であるから，f は $(x,y)=(a,a)$ のときただ一つの極小値を取る．

3-6.（少し議論を省略する）f_x,f_y は

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=\log x+x\cdot\frac{1}{x}-\log(1-x-y)+(1-x-y)\cdot\frac{-1}{1-x-y}=\log x-\log(1-x-y)\\f_y(x,y)&=\log y+y\cdot\frac{1}{y}-\log(1-x-y)+(1-x-y)\cdot\frac{-1}{1-x-y}=\log y-\log(1-x-y)\end{aligned}$$

となる．$f_x=0,f_y=0$ となるのは，$x=1-x-y,y=1-x-y$ より $x=y=\dfrac{1}{3}$ のときのみである．さらに，

$$f_{xx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x-y}=\frac{1-y}{x(1-x-y)},\quad f_{xy}=\frac{1}{1-x-y},\quad f_{yy}=\frac{1}{y}+\frac{1}{1-x-y}=\frac{1-x}{y(1-x-y)}$$

であり，

$$f_{xx}\big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)=6,\qquad f_{xy}\big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)=3,\qquad f_{yy}\big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)=6,$$

となる．$(h,k)\neq(0,0)$ ならば $6h^2+2\cdot3hk+6k^2=6\big(\big(h+\frac{1}{2}k\big)^2+\frac{3}{4}k^2\big)>0$ となるから，$f(x,y)$ は $\big(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\big)$ において極小値 $-\log 3$ をとる．

注意．3-4，3-5，3-6 において，停留点はただ一つである．もし得られた停留点以外で最大，最小になるならば他にも停留点が存在しないといけないので，それぞれのとき最大，最小である．