数学演習 B 問題（解析）　No.3

2025 年 10 月 27 日

3-1. k を正の定数とし，$z = f(x, y) = \dfrac{k}{xy}$ $(x > 0, y > 0)$ とおく．
(1) $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ における一次近似式 (一次までのテイラー展開) を求めよ．ただし，剰余項は R_2 と書いておけばよい．
(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $\left(a, b, \dfrac{k}{ab}\right)$ における接平面の方程式を書け．(この問題は接平面の方程式を書くだけでよい．)
(3) (2) で求めた接平面と x 軸，y 軸，z 軸との交点を求め，接平面と 3 つの座標平面（xy 平面，yz 平面，zx 平面）で囲まれた四面体（三角すい）の体積が，すべての a, b に対し $\dfrac{9k}{2}$ であることを示せ．

3-2. $f(x, y) = y^x$ $(x \in \mathbf{R}, y > 0)$ とおく．
(1) $\log f(x, y) = x \log y$ の両辺を偏微分して (対数微分)，f_x, f_y を求めよ．
(2) $f(x, y)$ の $(x, y) = (1, 2)$ における一次近似式 (一次までのテイラー展開) を求めよ．剰余項は R_2 と書いておけばよい．
(3) (2) を利用して $2.01^{1.02}$ の近似値を小数点以下第 3 位まで求めよ．ただし，$\log 2 \fallingdotseq 0.693$ として計算せよ．

3-3. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ とおく．
(1) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ をみたす (x, y) (x, y は実数) をすべて求めよ (3 点ある)．
（ヒント：$f_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - 1), f_y(x, y) = 4y'x^2 + y^2 - 1)$ と $4x, 4y$ でくくると考えやすい．）
(2) (1) で求めた点における f の二次までのテイラー展開を求めよ．ただし，剰余項は R_3 と書いておけばよい．
(3) f の極値を求めよ．

3-4. a を正の定数として，たて，横，高さの長さの和が $3a$ である直方体を考える．
(1) たて，横の長さを x, y とするとき，直方体の体積を x, y の関数として表せ．
(2) (1) で得られた関数 $f(x, y)$ $(x > 0, y > 0, x + y < 3a)$ の極値を求めよ．
注． (2) を用いて考えると，このような直方体の中で体積が最大になるのは，各辺の長さが a の立方体であることが分かる．

3-5. 体積一定 (a を正の数として a^3 とする) の直方体を考える．
(1) たて，横の長さをそれぞれ x, y とするとき，表面積の大きさ $f(x, y)$ を求めよ．
(2) $f(x, y)$ $(x > 0, y > 0)$ の極値を求めよ．
注． (2) を用いて考えると，$x = y = a$ のとき，つまり立方体のとき表面積が最小となることが分かる．

3-6. $x > 0, y > 0, x + y < 1$ をみたす (x, y) に対して

$$f(x, y) = x \log x + y \log y + (1 - x - y) \log(1 - x - y)$$

とおくとき，f の極値を求めよ．