数学演習 B 問題（解析 1B）No.1　略解

1-1. (1) $2(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0$

(2) 条件から $\ell-n=0, 2\ell-m=0$ であり，$m=2\ell, n=\ell$ となる．よって，法線ベクトルとして $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ がとれて，平面の方程式は $(x-1)+2(y-3)+(z-2)=0$ となる．注意：展開して解答する必要はない．

(3) $2(x-5)-4y+3(z-1)=0$

1-2. 法線ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ だから，平面上の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$，つまり

$$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0 \quad \text{または，} a^2+b^2+c^2=r^2 \text{ より} \quad ax+by+cz=r^2$$

となる．この場合は，左辺を展開するとキレイになる．(どちらも正解！)

1-3. (1) $f_x=5x^4y^9,\quad f_y=9x^5y^8$ (2) $f_x=3x^2-5y,\quad f_y=6y^2-5x$ (3) $f_x=4x+3y+5,\quad f_y=3x-8y$
(4) $f_x=y\cos(xy),\quad f_y=x\cos(xy)$ (5) $f_x=ae^{ax+cy}\cos(by),\quad f_y=(c\cos(by)-b\sin(by))e^{ax+cy}$
(6) $\log f=x\log y$ より $\dfrac{f_x}{f}=\log y, \dfrac{f_y}{f}=\dfrac{x}{y}$．したがって，$f_x=y^x\log y, f_y=xy^{x-1}$.

1-4. (1)$2h^2-4hk+7k^2=2(h-k)^2+5k^2$ より，(i).
(2)h,k が同符号なら $hk>0$，h,k が異符号なら $hk<0$ だから，(iii).
(3)$-h^2+hk-k^2=-\left(h-\dfrac{1}{2}k\right)^2-\dfrac{3}{4}k^2$ より，(ii).
(4)$h^2+4hk+k^2=(h+2k)^2-3k^2$ より，(iii).

1-5. $\tan f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ の両辺を x で微分すると，$\dfrac{f_x}{\cos^2 f(x,y)}=-\dfrac{y}{x^2}$ となる．三角関数に対する公式から $\dfrac{1}{\cos^2 f(x,y)}=1+\tan^2 f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2}$ 　となるので，$f_x(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$. を得る．

同様に，$\tan f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ の両辺を y で微分すると，$\dfrac{f_y}{\cos^2 f(x,y)}=\dfrac{1}{x}$ となり，$f_y(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ となる．

よって，$f_{xx}=-y\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$，$f_{yy}=x\dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$ となり，$f_{xx}+f_{yy}=0$ である．

1-6. (1) $f_x=3x^2+2xy=x(3x+2y), f_y=x^2+2y+2$ である．
(i) $x=0$ のとき，$f_y=0$ となるのは $y=-1$ のとき．
(ii) $x\neq 0$ とすると，$f_x=0$ より $y=-\dfrac{3}{2}x$ となり，$f_y=0$ に代入すると

$$x^2-3x+2=0 \quad \text{，つまり} \quad (x-1)(x-2)=0 \quad \text{となる．}$$

以上より，$f_x=f_y=0$ となるのは $(0,-1),(1,-\frac{3}{2}),(2,-3)$ のとき．

(2) $f_x=y-\dfrac{8}{x^2}, f_y=x-\dfrac{1}{y^2}$ である．$f_x=0$ より $y=\dfrac{8}{x^2}$ となるので，これを $f_y=0$ に代入すると

$$x-\left(\frac{8}{x^2}\right)^{-2}=x\left(1-\frac{x^3}{8^2}\right)=x\left(1-\frac{x^3}{2^6}\right)=0$$

となる．$x>0$ より $x=2^2=4$ であり，停留点は $(4,\frac{1}{2})$.

1-7. (1) $f(0,y)=0$ $(y\neq 0)$ より，$y\to 0$ のとき $f(0,y)\to 0$.
(2) $f(x,0)=1$ $(x\neq 0)$ より，$x\to 0$ のとき $f(0,y)\to 1$.
(3) $f(x,x)=\dfrac{1}{2}$ $(x\neq 0)$ だから，$x\to 0$ のとき $f(x,x)\to\dfrac{1}{2}$.
したがって，$f(0,0)$ の値をどのように定めても $z=f(x,y)$ は $(0,0)$ において連続にはならない．