

1-1. (1) 法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ で、点 $(1, 2, 3)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(2) 法線ベクトル $\begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix}$ がベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交していて、点 $(1, 3, 2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(3) 空間上の点 $(5, 0, 1)$ を通り、直線 $\frac{x+3}{2} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z}{3}$ に垂直な平面の方程式を求めよ.

1-2. 原点中心半径 r の球面上の点 $A(a, b, c)$ を通り、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ に垂直な平面の方程式を書け.

1-3. 次の関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数 f_x, f_y を求めよ. ただし a, b は定数である. (6) 以外は解答のみでよい.

(1) $f(x, y) = x^5 y^9$ (2) $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - 5xy + 27$ (3) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 4y^2 + 5x + 7$

(4) $f(x, y) = \sin(xy)$ (5) $f(x, y) = e^{ax+cy} \cos(by)$ (6) $f(x, y) = y^x \ (y > 0)$

1-4. 次の (h, k) の 2 次関数が,

(i) $(h, k) \neq (0, 0)$ ならばつねに正である,

(ii) $(h, k) \neq (0, 0)$ ならばつねに負である,

(iii) (i),(ii) 以外である (正負の判定はできない),

のいずれをみたすか判定せよ. ただし, 0 は正でも負でもないことに注意すること.

(この話題は 2 変数関数の極値問題を考える際に非常に重要である.)

(1) $2h^2 - 4hk + 7k^2$ (2) hk (3) $-h^2 + hk - k^2$ (4) $h^2 + 4hk + k^2$

(ヒント : $\alpha(h + \beta k)^2 + \gamma k^2$ の形に変形する.)

1-5. 関数 $z = f(x, y)$ に対して, $(f_x)_x, (f_y)_y$ をそれぞれ f_{xx}, f_{yy} と書く. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ のとき, $f_{xx} + f_{yy} = 0$ が成り立つことを示せ.

1-6. 次の関数 $z = f(x, y)$ に対して, $f_x(x, y) = 0$ と $f_y(x, y) = 0$ をともにみたす点 (x, y) (停留点という) をすべて求めよ. ただし, (2) は $x > 0, y > 0$ とする.

(1) $f(x, y) = x^3 + x^2 y + y^2 + 2y$ (2) $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{1}{y}$

1-7. (2 変数関数の連続性に関する注意) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ とおく.

(1) (x, y) が y 軸に沿って原点に近づくとき, $f(x, y)$ の極限を求めよ.

(2) (x, y) が x 軸に沿って原点に近づくとき, $f(x, y)$ の極限を求めよ.

(3) (x, y) が直線 $y = x$ に沿って原点に近づくとき, $f(x, y)$ の極限を求めよ.

(これから $f(0, 0)$ の値をどのように定義しても f は原点で連続にはならないことが分かる.)