数学演習 A 問題（解析 1A）略解　No.6

6-1. (I) (1) $2-\dfrac{2}{\sqrt{b}}$ (2) 2

(Ⅱ) (1) $\alpha\neq 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}dx=\left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_{x=1}^b=\frac{1}{-\alpha+1}\big(b^{1-\alpha}-1\big)$.

$\alpha=1$ のとき，$\displaystyle\int_1^b \frac{1}{x}\,dx=\log b$.

(2) $0<\alpha<1$ のときは $b^{1-\alpha}\to\infty$，$\alpha=1$ のときは $\log b\to\infty$ だから収束しない．$\alpha>1$ のときは，$b^{1-\alpha}\to 0$ だから $\dfrac{1}{\alpha-1}$ に収束する．

6-2. $\displaystyle\int_1^R \frac{1}{x(x+1)}dx=\int_1^R\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\log\frac{R}{R+1}+\log 2=\log\frac{1}{1+R^{-1}}+\log 2.$

したがって，$\displaystyle\int_1^R \frac{1}{x(x+1)}dx\to\log 2\ (R\to\infty)$.

6-3. (1) $\displaystyle\int_0^R xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_{x=0}^R+\int_0^R e^{-x}dx=-Re^{-R}+1-e^{-R}\to 1\quad(R\to\infty)$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta=\pi.$

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{2}.$

(4) $e^x=y$ の後，(2) にならって $y=\tan\theta$ なる変換をすると

$$\int_0^\infty\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^\infty\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx=\int_1^\infty\frac{1}{1+y^2}dy=\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

(5) $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_{x=0}^1-\int_0^1 x\times\frac{1}{x}dx=-1$

6-4. (1) 部分積分を繰り返すと，

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-x}\sin(ax)dx&=\Big[(-e^{-x})\sin(ax)\Big]_{x=0}^R+a\int_0^R e^{-x}\cos(ax)dx\\&=-e^{-R}\sin(aR)+a\Big[(-e^{-x})\cos(ax)\Big]_{x=0}^R-a^2\int_0^R e^{-x}\sin(ax)dx\end{aligned}$$

となり，右辺の積分を移項して $1+a^2$ で割れば次が得られる：

$$\int_0^R e^{-x}\sin(ax)dx=\frac{a}{1+a^2}-\frac{\sin(aR)}{1+a^2}e^{-R}-\frac{a\cos(aR)}{1+a^2}e^{-R}.$$

(2) $|\sin(aR)e^{-R}|\leqq e^{-R}\to 0$，$|\cos(aR)e^{-R}|\leqq e^{-R}\to 0\ (R\to\infty)$ より，

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(ax)dx=\frac{a}{1+a^2}.$$

6-5. (1) 三角関数の倍角の公式と $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2(x/2)}\frac{1}{2}=\frac{1+t^2}{2}.$$

(2) (i) (1) を用いて置換積分をすると，

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}dt$$

となる．あとは容易で，結果は 1.

(ii) (1) を用いて置換積分をすると，

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} = \int_0^{\infty} \frac{2}{(1+a)+(1-a)t^2}dt = \frac{2}{1+a}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+bt^2}$$

となる．ただし，$b = \dfrac{1-a}{1+a}$ であり，$0<a<1$ より $b>0$ である．従って，$\sqrt{b}t = \tan\theta$ によって置換積分をして整理すると，

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

6-6. 積分定数を C とする．

(1) $t = x^2+1$ とおいて置換積分をすると，$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)+C.$

(2) $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$ より $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log(x^2+1)+C.$

(3) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\Big)$ を用いると，$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C$

(4) $\dfrac{x^4}{x^2-1} = x^2+1+\dfrac{1}{x^2-1} = x^2+1+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\Big)$ より
$\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-1}dx = \frac{1}{3}x^3+x+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C.$

6-7. (1) $I_1 = 1,\ I_2 = \dfrac{\pi}{4}.$

(2) $\sin^n x = \sin^{n-1}x(-\cos x)'$ として部分積分を用いると，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x(-\cos x)'dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

となる．$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ より，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

が得られる．整理して結論を得る．

(3) (1),2) より

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}I_2 = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}.$$
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}.$$

(4) $t = \cos x$ によって置換積分をすると，$\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}dx = I_{2n+1}$ となる．