

解答への道筋や必要な計算を解答用紙に書き残すこと.

6-1. (I) (1) $\int_1^b \frac{1}{x^{3/2}} dx$ ($b > 1$) を求めよ.

(2) $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^{3/2}} dx$ を求めよ.

極限が存在するので, 関数 $y = \frac{1}{x^{3/2}}$ は $[1, \infty)$ 上積分可能であるといい, 極限値を $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ と書く.

(II) (1) $\alpha > 0$ とするとき, $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx$ ($b > 1$) を求めよ.

(2) $\frac{1}{x^\alpha}$ が $[1, \infty)$ 上積分可能であるための α に対する条件を求め, このとき $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ の値を求めよ.

6-2. 広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx$ を求めよ.

6-3. 次の広義積分の値を求めよ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ は証明なしで使って良い.

(1) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$ (2) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ (3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (4) $\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ (5) $\int_0^1 \log x dx$

(ヒント: (2) は $x = \tan \theta$, (3) は $x = \sin \theta$, (4) は $y = e^x$ とおいて置換積分.)

6-4. (1) a を定数とする. 部分積分を 2 回繰り返すことにより, 定積分 $\int_0^R e^{-x} \sin(ax) dx$ ($R > 0$) を求めよ.

(2) 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x} \sin(ax) dx$ を求めよ.

6-5. (1) $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくとき, $\sin x, \cos x, \frac{dt}{dx}$ を t を用いて表せ.

(2) 次の定積分を (1) を用いて有理関数の定積分に変形して値を求めよ. ただし, $0 < a < 1$ とする.

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x} dx$ (ii) $\int_0^\pi \frac{1}{1 + a \cos x} dx$

6-6. 次の不定積分を求めよ. ただし, (3), (4) は $x > 1$ の範囲で考える.

(1) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ (2) $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$ (3) $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ (4) $\int \frac{x^4}{x^2-1} dx$

6-7. $n = 1, 2, \dots$ に対して $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ とおく.

(1) I_1, I_2 を求めよ.

(2) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ($n \geq 3$) を示せ.

(3) I_{2n}, I_{2n+1} ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ.

(4) $\int_0^1 (1-t^2)^n dt$ を求めよ.