数学演習 A 問題（解析 1A）略解　No.5

注意． この略解では，不定積分における積分定数は C と書く．

5-1. (1)$\dfrac{1}{2}x^2\log x-\dfrac{1}{4}x^2+C$　(2)$\dfrac{1}{2a}\log\Bigl(\dfrac{x-a}{x+a}\Bigr)+C$　(3)$\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin(2x)+C$
(4)$\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$

5-2. (1) $\log f(x)=x\log 3$ の両辺を微分して，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\log 3$．よって，$f'(x)=3^x\log 3$．
(2) (1) より $\Bigl(\dfrac{1}{\log 3}3^x\Bigr)'=3^x$ だから，$\displaystyle\int 3^x dx=\frac{1}{\log 3}3^x+C$.

5-3. (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}dx=\frac{2}{3}\Bigl[(x+1)^{3/2}\Bigr]_{x=-1}^{1}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$
(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\Bigl[\mathrm{Arctan}\ x\Bigr]_{x=-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$．または，$x=\tan\theta$ とおいて $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ を用いて置換積分すると，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{2}$.
(3) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{1}{2}\Bigl(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\Bigr)dx=\frac{1}{2}\Bigl[\log(x-1)-\log(x+1)\Bigr]_{x=2}^{3}=\frac{1}{2}(\log 3-\log 2)$
(4)$x^2+1=t$ とおくと，$2xdx=dt$ である．よって

$$\int_0^1(x^2+1)^4xdx=\int_1^2t^4\frac{1}{2}dt=\Bigl[\frac{1}{2}\frac{1}{5}t^5\Bigr]_{t=1}^{2}=\frac{31}{10}.$$

(5) $\displaystyle\int_1^e\log xdx=\int_1^e(x)'\log xdx=\Bigl[x\log x\Bigr]_{x=1}^{e}-\int_1^e x\frac{1}{x}dx=e-\Bigl[x\Bigr]_{x=1}^{e}=e-(e-1)=1$
(6) $\displaystyle\int_1^2\Bigl(\sqrt{x}+2+\frac{1}{\sqrt{x}}\Bigr)dx=\Bigl[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigr]_{x=1}^{2}+2+\Bigl[2x^{\frac{1}{2}}\Bigr]_{x=1}^{2}=\frac{10\sqrt{2}-2}{3}$

5-4. (1) $\displaystyle\int_\delta^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\Bigl[2\sqrt{x}\Bigr]_{x=\delta}^{1}=2(1-\sqrt{\delta})\to 2\ (\delta\to+0)$
(2) $a\neq 1$ のとき，$\dfrac{1-\delta^{1-a}}{1-a}$. $a=1$ のとき，$-\log\delta$.
(3) $0<a<1$ のとき $\dfrac{1}{1-a}$ に収束.

5-5. 区分求積法である．(1) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$　(2) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\to\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2.$

5-6. (1)$\dfrac{(x^2+1)^{a+1}}{2(a+1)}$ $(a\neq -1)$，$\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$ $(a=-1)$ (2) $-(x^2+2x+2)e^{-x}$
(3) $\tan x=t$，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ と変換すると $\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt$，$0\leqq t\leqq 1$．よって

$$\int_0^{\pi/4}\tan^2 xdx=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}dx-\frac{\pi}{4}=\int_0^1dt-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$

(4) $\tan x=t$，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ と変換すると $\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt$，$0\leqq t\leqq 1$．よって

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\pi/4}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^1(1+t^2)dt=\Bigl[t+\frac{1}{3}t^3\Bigr]_{t=0}^{1}=\frac{4}{3}.$$

5-7. (1) $(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$ であるので

$$\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{p}{x-1}+\frac{q}{(x-1)^2}+\frac{r}{x+1}+\frac{s}{(x+1)^2}$$

とおいて p,q,r,s を求めると $p=-1/4,q=1/4,r=1/4,s=1/4$. すなわち

$$\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left\{\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right\}.$$

よって不定積分は

$$\int\frac{1}{(x^2-1)^2}dx=\frac{1}{4}\left\{-\log(x-1)-\frac{1}{x-1}+\log(x+1)-\frac{1}{x+1}\right\}+C=\frac{1}{4}\Big(\log\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\Big)+C.$$

(2) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ より，ヒントに従うと

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

となり，

$$\int\frac{1}{x^3-1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

の右辺の積分を求めればよい.（以下の計算を参照）

　または,

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{p}{x-1}+\frac{qx+r}{x^2+x+1}$$

の形を仮定して計算すると $p=1/3,\ q=-1/3,\ r=-2/3$ となるので

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)$$

と展開される．さらに，$(x^2+x+1)'=2x+1$ に注意して

$$\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

と変形すると，積分は

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^3-1}dx&=\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx\right)\\
&=\frac{1}{3}\left\{\int\frac{1}{x-1}dx-\int\left(\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)dx\right\}\\
&=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\\
&=\frac{1}{3}\log(x-1)-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{Arctan}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C\\
&=\frac{1}{3}\log(x-1)-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\\
&=\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}$$

簡単そうに見えて，少々面倒くさい.