

2025 年 6 月 16 日

不定積分あるいは定積分を求める問題では, $\int f(x)dx = \dots$ あるいは $\int_a^b f(x)dx = \dots$ のように問題が分かるように書くこと. 不定積分の積分定数は C と書いておけばよい.

5-1. 次の不定積分を求めよ. ただし, $a > 0, b \in \mathbf{R}, n \neq -1$ とし, (2) は $x > a$ の範囲で考える.

$$(1) \int x \log x \, dx \quad (2) \int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx \quad (3) \int \sin^2 x \, dx \quad (4) \int (ax + b)^n \, dx$$

ヒント: (2) は部分分数展開を用いる. つまり, $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{p}{x - a} + \frac{q}{x + a}$ をみたす定数 p, q を求めて積分する.

5-2. (1) $f(x) = 3^x$ とおくと, 対数微分により f の導関数 f' を求めよ.

(2) 不定積分 $\int 3^x \, dx$ を求めよ.

5-3. 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_{-1}^1 \sqrt{x+1} \, dx \quad (2) \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx \quad (3) \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} \, dx$$

$$(4) \int_0^1 (x^2+1)^4 x \, dx \quad (5) \int_1^e \log x \, dx \quad (6) \int_1^2 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \, dx$$

ヒント: (2) は $x = \tan \theta$ において置換積分. (4) は $t = x^2 + 1$ において置換積分.

5-4. (1) $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ を求めよ.

(2) $a > 0, 0 < \delta < 1$ とするとき, $I(\delta) = \int_{\delta}^1 \frac{1}{x^a} \, dx$ を求めよ.

(3) $\delta \rightarrow +0$ のとき $I(\delta)$ が収束するための $a > 0$ の条件を求めよ. さらに収束する場合について, 極限 $\lim_{\delta \rightarrow +0} I(\delta)$ の値を求めよ

$\left[(3) \text{ のとき極限を } \int_0^1 \frac{1}{x^a} \, dx \text{ と書く. これが広義積分の一つ.} \right]$

5-5. 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

5-6. 次の不定積分, 定積分を求めよ. ただし, a は実数とする.

$$(1) \int x(x^2+1)^a \, dx \quad (2) \int x^2 e^{-x} \, dx \quad (3) \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx \quad (4) \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$$

ヒント: (1) は a の値に関する場合分けをすること. (3), (4) は $\tan x = t$ において置換積分せよ.

5-7. 部分分数展開により次の不定積分を求めよ. ただし, $x > 1$ の範囲で考える.

$$(1) \int \frac{1}{(x^2-1)^2} \, dx \quad (2) \int \frac{1}{x^3-1} \, dx$$

ヒント: (1) $\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{p}{x-1} + \frac{q}{(x-1)^2} + \frac{r}{x+1} + \frac{s}{(x+1)^2}$ をみたす定数 p, q, r, s を求める.

(2) $\frac{1}{x^3-1} = \frac{p}{x-1} + \frac{s(2x+1)+t}{x^2+x+1}$ をみたす定数 p, s, t を求めることから. $(x^2+x+1)' = 2x+1$ に注意する.