

数学演習 A 問題（解析 1A）略解 No.4

4-1. (1) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + R_5(x)$ (2) $x - \frac{1}{6}x^3 + R_4(x)$ (3) $2x - \frac{4}{3}x^3 + R_4(x)$ (4) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + R_4(x)$

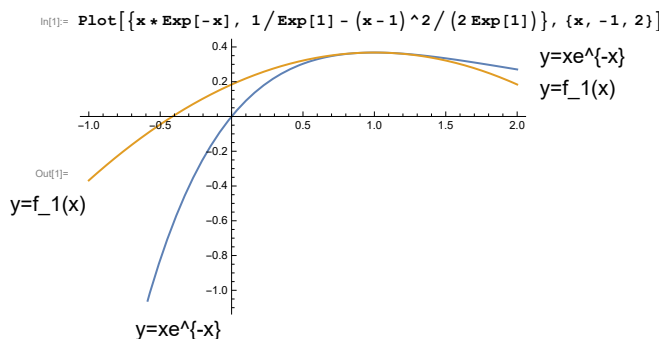
4-2. (1) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + R_3(x)$ (2) 1.095 (3) $\sqrt{120} = 10 \times \sqrt{1.2}$ より 10.95

4-3.(1) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ より, 増減表を書けば, $x < 1$ で単調増加, $x > 1$ で単調減少である. $x = 1$ で極大値 (最大値) e^{-1} をとる. $f(0) = 0$ が分かるように書くこと.

(2) $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ より, $\frac{1}{e} - \frac{1}{2e}(x-1)^2 + R_3(x)$.

(3) $f'''(x) = -(x-3)e^{-x}$ より, $\frac{1}{e} - \frac{1}{2e}(x-1)^2 + \frac{1}{3e}(x-1)^3 + R_4(x)$

(4) $x = 1$ の近くで $f(x)$ と $f_1(x)$ が近いことを実感することが目的. x が 1 から離れると, $f(x)$ と $f_1(x)$ も離れる. $f(x) - f_1(x) = \frac{1}{3e}(x-1)^3 + R_4(x)$ だから, $x = 1$ で $f(x)$ と $f_1(x)$ の大小が変わる.



4-4. (1) $n > r$ ならば, 分母の $r+2, \dots, n$ を $r+1$ に置き換えると

$$0 < \frac{r^n}{n!} = \frac{r^{n-r} r^r}{n(n-1) \cdots (r+1)r(r-1) \cdots 1} < \left(\frac{r}{r+1}\right)^{n-r} \frac{r^r}{r!}$$

が分かる. $0 < \frac{r}{r+1} < 1$ だから右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するので, はさみうちの原理より $\frac{r^n}{n!} \rightarrow 0$ を得る.

(2) $|x| \leq m$ をみたす正の整数 m をとると, $0 < \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{m^n}{n!}$ 成り立つ. (1) より右辺が $n \rightarrow \infty$ のときに 0 に収束することから結論を得る.

(3) テイラーの定理より, $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$ をみたす c が 0 と x の間に存在する.

$$\left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

であり, (1) より右辺は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するから, 冒頭の等式の右辺で $n \rightarrow \infty$ とすれば結論を得る.

4-5. $x \rightarrow 0$ のとき, (1) $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \frac{\frac{x^3}{6} - R_4(x)}{\frac{x^2}{2} - R_3(x)} = \frac{\frac{x}{6} - \frac{R_4(x)}{x^2}}{\frac{1}{2} - \frac{R_3(x)}{x^2}} \rightarrow 0$. ($\frac{R_4(x)}{x^3} \rightarrow 0$ より $\frac{R_4(x)}{x^2} \rightarrow 0$)

(2) 通分して Hint のように計算すると,

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{(x - \frac{x^3}{6} + R_4(x))^2 - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-\frac{x^4}{3} + 2xR_4(x) + (\frac{x^3}{6} - R_4(x))^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{-\frac{1}{3} + 2\frac{R_4(x)}{x^3} + (\frac{x}{6} - \frac{R_4(x)}{x^2})^2}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \rightarrow -\frac{1}{3}$$

4-6. $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ において, $y = f(x)$ のグラフの概形を考える. 他も同様.

4-7. Hint の通りに解答する. P を通る直線 $y = -t(x - a) + b$ と x 軸との交点は $(a + \frac{b}{t}, 0)$ であり, y 軸との交点は $(0, at + b)$ である. したがって, この2点を結ぶ線分の長さの2乗を $f(t)$ とおくと,

$$f(t) = (ta + b)^2 + \left(a + \frac{b}{t}\right)^2 = (t^2 + 1)\left(a + \frac{b}{t}\right)^2$$

が成り立つ. $f'(t)$ を計算して, 増減表を書けば, $f(t)$ ($t > 0$) が $t = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$ のとき最小値 $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3$ をとることが分かる. したがって, 求める最小値は $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.