4-1. 次の関数のマクローリン展開 ($x = 0$ のまわりのテイラー展開) を, (1) は x^4 の項まで, 他は x^3 の項まで求めよ. ただし, 誤差項は $R_5(x)$ または $R_4(x)$ と書いておけばよい. (以下の問題も同様.)

(1) $\cos x$ (2) $\sin x$ (3) $\sin(2x)$ (4) $\log(1+x)$

4-2. (1) $f(x) = \sqrt{x}$ の $x = 1$ のまわりのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(2) $\sqrt{1.2}$ の近似値を (1) の結果を用いて求めよ.

($\sqrt{1.21} = 1.1$ であり, 結果は 1.1 より少し小さいはずである.)

(3) $\sqrt{120}$ の近似値を求めよ.

4-3. (1) 関数 $f(x) = xe^{-x}$ の増減および $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$ の挙動を調べてグラフの概形を描け. グラフの凹凸は調べなくてよい.

(2) $f(x)$ が極大となる $x = 1$ のまわりの $f(x)$ のテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) $f(x)$ が極大となる $x = 1$ のまわりの $f(x)$ のテイラー展開を 3 次の項まで求めよ.

(4) (2) で得た 2 次式を $f_1(x)$ とする. (3) を参考にして, x が 1 に近いときの $y = f_1(x)$ のグラフを, 点線で (1) のグラフに重ねて描け.

4-4. (1) すべての自然数 r に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n!} = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ が成り立つことを示せ.

(3) $f(x) = e^x$ に対してテイラーの定理を適用し, (1) を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$ がすべての x に対して成り立つことを示せ.

4-5. 次の極限値を 4-1 で求めたマクローリン展開を用いて計算せよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

(Hint: $\sin x = x - Ax^3 + R_4(x), \cos x = 1 - Bx^2 + R_3(x)$ と書き, 4-1 で求めた A, B の値と $x \rightarrow 0$ のとき $\frac{R_4(x)}{x^3}, \frac{R_3(x)}{x^2} \rightarrow 0$ であることを用いる. (2) はまず通分する.)

4-6. 次の不等式を証明せよ.

(1) $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$

(2) $x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2(1+x)} \quad (x \geq 0)$

4-7. 第 1 象限の内部の 1 点 $P(a, b)$ を固定するとき, P を通る直線の第 1 象限にある部分の長さの最小値を求めよ. (Hint: 直線の傾きは負として良いので $-t$ ($t > 0$) とし直線の方程式を書き, x 軸, y 軸との交点を結ぶ線分の長さを考える.)