

数学演習 A 問題 (解析 1A) 略解 No.3

3-1. (1) 3 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\log \frac{3}{2}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \theta}{\sin^3 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{3 \sin^2 \theta \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{12 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta} = -\frac{1}{6}$ (6) 0

3-2. ともに 0. (1) は $xe^{-2x} = \frac{x}{e^{2x}}$ に対してロピタルの定理を用いればよい.

(2) はロピタルの定理を何度も用いるか, または帰納法によればやさしい.

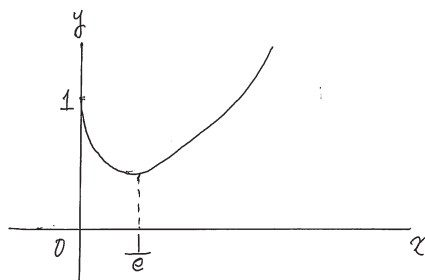
3-3. (1) ロピタルの定理より,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 0.$$

$x \rightarrow +0$ のとき $\log(x^x) = x \log x$ が 0 に収束するので, 対数関数の連続性より x^x は 1 に収束する.

(2) $y' = x^x(1 + \log x)$

(3) 増減表は省略する. $0 < x < e^{-1}$ では単調減少, $x = e^{-1}$ で極小値をもち, $x > e^{-1}$ では単調増加で $x \rightarrow \infty$ のとき発散するようにグラフを描くこと. なお, (1) より $x^x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow +0$) である. さらに $y' = x^x(1 + \log x) \rightarrow -\infty$ であることから, $x \rightarrow +0$ のときの収束の様子をグラフに表すこと.



3-4. (1) $1 + 2(x - 1)$, $1 + \frac{1}{2}(x - 1)$, $\tan(\frac{\pi}{3}) + (\cos(\frac{\pi}{3}))^{-2}(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} + 4(x - \frac{\pi}{3})$.

注意. より良い近似には $(x - 1)^2$ など高次の多項式を用いるので, 一次式を展開しないこと.

(2) $(1.02)^2 \doteq 1 + 2(1.02 - 1) = 1.04$, $\sqrt{1.04} \doteq 1 + \frac{1}{2}(1.04 - 1) = 1.02$, $\sqrt{10400} = 100\sqrt{1.04} \doteq 102$.

$61^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$ に注意すると, $\tan 61^\circ \doteq \sqrt{3} + 4\frac{\pi}{180} \doteq 1.73 + \frac{4 \times 3.14}{180} \doteq 1.80$

3-5. $n-1 < a < n$ をみたす自然数 n をとると, $x \geq 1$ に対して $x^{n-1}e^{-2x} \leq x^ae^{-2x} \leq x^ne^{-2x}$ が成り立つ. 問題 3-2 より $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-1}e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^ne^{-2x} = 0$ だから, はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow \infty} x^ae^{-2x} = 0$.

3-6. (1) 部分積分を実行すると,

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b f'(x)(-(b-x))'dx = f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(x)(b-x)dx$$

となるから, これを与えられた等式に代入すればよい.

(2) (1) と同様に部分積分より

$$\int_a^b f''(x)(b-x)dx = \int_a^b f''(x)\left(-\frac{1}{2}(b-x)^2\right)'dx = \frac{1}{2}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^b f'''(x)(b-x)^2dx$$

となるから, (1) の右辺の積分に代入すればよい.

(3) 数学的帰納法.