3-1. ロピタルの定理を用いて次の極限值を求めよ. ただし, k は正の定数とする.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^k}$$

3-2. (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x}$ の値を求めよ.

(2) 正の整数 n に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-2x}$ の値を求めよ.

3-3. (1) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0, \lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ を示せ.

(2) $y = x^x (x > 0)$ の導関数を求めよ.

(3) $y = x^x (x > 0)$ のグラフの概形を描け. グラフの凹凸は調べなくてよいが, (1),(2) をもとに $x \rightarrow +0$ のときの挙動について注意してグラフを描くこと.

3-4. 関数 $f(x)$ の $x = a$ を中心とする 1 次までのテイラー展開から剰余項を除いた一次式 $f(a) + f'(a)(x - a)$ を $f(x)$ の $x = a$ における一次近似式という.

(1) $x^2, \sqrt{x}$ の $x = 1$ における一次近似式と $\tan x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における一次近似式を求めよ.

(2) (1) で求めた一次近似式を用いて, $(1.02)^2, \sqrt{1.04}, \sqrt{10400}, \tan 61^\circ$ の近似値を求めよ. ただし, 有効数字 3 桁で, $\sqrt{3} \doteq 1.73, \pi \doteq 3.14$ を用いてよい.

(Hint: 61° をラジアンで表して $\frac{\pi}{3} + \text{何か}$ の形にする.)

3-5. a を正の実数で, 整数ではないとするとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-2x}$ の値を求めよ. 解答に問題 3-2 の結果を用いてよい.

講義では, 未だ積分の話はしていませんが, 次の問題はできるはずです.

3-6. f を区間 $[a, b]$ 上の無限回微分可能な関数とするとき,

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) dx$$

の右辺の積分に対して部分積分を施すことによって, 次を示せ.

$$(1) f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \int_a^b f''(x)(b - x) dx.$$

$$\text{(Hint: } \int_a^b f'(x) dx = \int_a^b f'(x)(-(b - x))' dx)$$

$$(2) f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2} f''(a)(b - a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^b f'''(x)(b - x)^2 dx.$$

$$(3) f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(x)(b - x)^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$