

2-1. (1) 微分の定義 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を用い, $\frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right)$ の $h \rightarrow 0$ とした極限を求めることにより, $\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ を示せ.

(2) 対数微分法 $(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ を用いて, 次の関数の導関数を求めよ. ただし, $a > 0, b \in \mathbf{R}$ とする.

(i) $f(x) = a^x \ (x \in \mathbf{R})$ (ii) $g(x) = x^b \ (x > 0)$

2-2. $\sin x = \frac{1}{2}$ をみたす x を すべて書け.

2-3. (1)–(4) は 値を求め, (5),(6) は簡単にせよ.

(1) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ (2) $\arcsin(-1)$ (3) $\arctan(1)$ (4) $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
 (5) $e^{-\log x}$ (6) $e^{5 \log x + x \log 5}$

注意. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよということは, $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$ をみたす θ を $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ から探せ, ということである. $\arcsin(x)$ は $[-1, 1]$ 上の $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ に値をもつ関数であり値は 1 つである. 前問との違いを理解すること.

2-4. 次の関数の導関数を求めよ. (1),(2) は合成関数の微分の公式を用い, 簡単に導出の手順を書くこと. ただし, a, b は定数である.

(1) $y = \arcsin(ax + b)$ (2) $y = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ (3) $y = x \cdot \arcsin(x)$

(ヒント: (1) 値域 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ に注意して, $\sin(y) = ax + b$ の両辺を x について微分する.)

2-5. すべての自然数 n に対して, 次を求めよ.

(1) $\frac{d^n}{dx^n} \log(1+x)$ (2) $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin(2x)$

2-6. 次を簡単にせよ. 必要なら図を描いて, 簡単に説明すること.

(1) $\tan(\arcsin(x))$ (2) $\cos(2\arctan(x))$ (3) $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(ヒント: (1) $\arcsin(x) = \alpha$ とおいて直角三角形を描く. または, $\sin \alpha = x$ から $\cos \alpha$ を x で表す.

(2) $\arctan(x) = \beta$ とおいて...)

2-7. $y = \arcsin(\sin x) \ (x \in \mathbf{R})$ を考える.

(1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $y = x$ である. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ のとき y を x で表せ.

(2) $y = \arcsin(\sin x) \ (x \in \mathbf{R})$ のグラフを描け.