数学演習 A 問題（解析 1A）略解　No.1

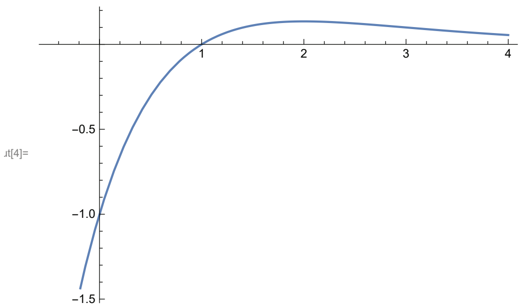
1-1. (1) $\dfrac{7}{7x-23}$　(2) $-\dfrac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$　(3) $-\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$　(4) $\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

1-2. (1) $\dfrac{d}{dx}(x\log x) = 1+\log x.$
(2) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1+\log x$ より，$f'(x) = x^x(1+\log x).$
(3) 合成関数の微分の公式より $f'(x) = e^{x\log x}(x\log x)' = x^x(1+\log x).$

1-3. $y' = (-x+2)e^{-x}$ より y は $x<2$ で単調増加，$x>2$ で単調減少である．$x=2$ において極大値 e^{-2} をとる．$(0,-1),(1,0)$ を通ることは明記すべきである．$x\to-\infty$ のとき $y\to-\infty$，$x\to\infty$ のとき y は減少しながら $y\to 0$ であることに注意して，グラフを描くこと．

x		2	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$

```
In[4]:= Plot[(x - 1) Exp[-x], {x, -0.5, 4}]
```



計算機に書かせたグラフで，原点，極大点などが上のグラフにはなくて悪い例になっています．各自，補って下さい．

1-4. (1) $2f(x)f'(x)$.
(2) 関係式の両辺を x で微分すると，$\dfrac{x}{2}+yy'=0$．よって，$y' = -\dfrac{x}{2y}$，
(3) 接線の傾きは，$(x,y) = \left(1,\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ を (2) の結果に代入して $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$．よって，接線の方程式は
$y = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-1)+\sqrt{\dfrac{3}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}x+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. (カッコを展開していない答案もOK．むしろ，展開しない方が良い．)

1-5. (1) 関係式の両辺を x で微分すると，$(xy)' = y+xy', (y^2)' = 2yy'$ より $x+y+xy'+4yy'=0$ となる．これから，$y' = -\dfrac{x+y}{x+4y}$ となる．
(2) $y'=0$ とすると $x+y=0$．これと $x^2+2xy+4y^2=1$ とから $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．(このとき，$y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．)
(3) (1) で得た $x+y+xy'+4yy'=0$ の両辺を x で微分すると，$1+2y'+xy''+4(y')^2+4yy''=0$ となる．
(i) $(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき，さらに $y'=0$ を用いると $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ が得られる．
(ii) $(x,y) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき，同様に $y'' = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
(実はこの y'' の符号から，$x = 1/\sqrt{3}$ のとき極小，$x = -1/\sqrt{3}$ のとき極大であることが分かる．)

1-6. (1) は省略する．(2) 関数 $f(x) = a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}$ は連続関数である．$a_0>0$ だから，x が十分大きいとき $f(x)>0$ であり，x が負でその絶対値が十分大きいときは $f(x)<0$ である．したがって，$f(x)$ の連続性より $f(x)=0$ となる x が少なくとも 1 つ存在する．(中間値の定理を用いている．)

1-7. (1) 前者は定義より簡単．後者は，右辺を変形すればよい．
(2) $(\sinh(x))' = \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.　同様に，$(\cosh(x))' = \sinh(x)$.
$(\tanh(x))' = \left(\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \dfrac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.