

“解答への道筋や必要な計算を解答用紙に書き残すこと.”

1-1. 次の x の関数の導関数を求めよ. ただし, (1) は $7x - 23 > 0$ の範囲で考える.

$$(1) \log(7x - 23) \quad (2) \frac{2x}{x^2 - 1} \quad (3) \operatorname{cosec}(x) \left(= \frac{1}{\sin(x)} \right) \quad (4) \sec(x) \left(= \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

(3), (4) は $\sin(x), \cos(x)$ の逆数を $\operatorname{cosec}(x), \sec(x)$ と書くということである. それぞれ, コセカント, セカントと読む.

1-2. $f(x) = x^x$ ($x > 0$) とおく.

$$(1) \frac{d}{dx} (\log f(x)) \text{ を求めよ.}$$

$$(2) \frac{d}{dx} (\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であることを用いて } f'(x) \text{ を求めよ.}$$

$$(3) f(x) = e^{x \log x} \text{ と変形して } f'(x) \text{ を求めよ.}$$

1-3. 関数 f を $f(x) = (x-1)e^{-x}$ で定めるとき, f の増減表を書き, $y = f(x)$ のグラフを描け. ただし, グラフの凹凸は調べなくてもよいが, グラフの通る点が簡単に分かる場合は明記すること, また, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ は証明なしで用いてよい.

1-4. (1) $(f(x))^2$ の x に関する導関数を求めよ.

$$(2) \text{ 関係式 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ によって } y \text{ を } x \text{ の関数と見なすとき, 導関数 } y' = \frac{dy}{dx} \text{ を } x, y \text{ を用いて表せ.}$$

$$(3) \text{ 楕円 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ の点 } \left(1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \text{ における接線の方程式を求めよ.}$$

1-5. 関係式 $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ によって y を x の関数と見なす.

$$(1) y \text{ の導関数 } y' = \frac{dy}{dx} \text{ を } x, y \text{ を用いて表せ.}$$

$$(2) y' = 0 \text{ をみたす } x \text{ をすべて求めよ.}$$

$$(3) (2) \text{ で求めた } x \text{ における } y \text{ の 2 階導関数 } y'' \text{ の値を求めよ.}$$

1-6. (1) p, q, r を実数とすると, 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ が少なくとも 1 つの実根 (実解) をもつことを示せ.

(2) n を自然数, $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ は実数で $a_0 > 0$ とするとき, 奇数次の代数方程式

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

は, 少なくとも 1 つの実根 (実解) をもつことを示せ.

1-7. 次で定義される関数を双曲線関数という. ハイパーボリックサインまたはサインハイパーボリックなどと読む.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(1) 次を示せ. ただし, 三角関数と同様に $(\sinh(x))^2$ を $\sinh^2(x)$ などと書く.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \sinh(x+y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y).$$

(2) $\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x)$ の導関数を双曲線関数を用いて表せ.