

# 双曲空間内の6角形ハニカムの中心と アイゼンシュタイン整数

青山学院大学 理工学部 数理サイエンス学科

15119134 吉川耕之輔 西山研究室

2025年2月17日

# 目次

<b>1 序論</b>	<b>3</b>
1.1 背景	3
1.2 主結果	4
1.3 本論文の構成	5
<b>2 ミンコフスキー時空間内の点の表示</b>	<b>5</b>
2.1 ミンコフスキー時空間	5
2.2 エルミート行列	6
2.3 ミンコフスキー時空間と2次複素エルミート行列全体の同型	6
<b>3 アイゼンシュタイン整数</b>	<b>10</b>
3.1 アイゼンシュタイン整数の定義	10
<b>4 6角形ハニカムの定義と性質</b>	<b>11</b>
4.1 6角形ハニカムの定義	12
4.2 六角形ハニカムの諸量	16
<b>5 6角形ハニカムと作用</b>	<b>18</b>
5.1 $GL(2, \mathbb{E})$ のハニカムへの作用	18
5.2 Coxeter 群	20
5.3 基本6角形に対する作用	20
5.4 すべての6角形に対する作用	21
5.5 補足：基本6角形に隣接する6角形の中心	23

# 1 序論

## 1.1 背景

ハニカムとは、3次元空間を正多胞体（正多面体）で埋め尽くした構造のことであり、双曲空間においても考えることができる。今回、John C.Baez が書いた論文『The Hexagonal Tiling Honeycomb』[Bae24b] を読んで、以降で定義する双曲空間におけるハニカム  $\{6, 3, 3\}$  と以下で定義されるアイゼンシュタイン整数環と呼ばれる特別な整数環

$$\text{アイゼンシュタイン整数環： } \mathbb{E} = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad (\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

との関連性を学んだ。当初、ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  とアイゼンシュタイン整数  $\mathbb{E}$  の関係性を一般化して、別のハニカム構造とガウス整数環  $\mathbb{Z}[i]$  との関係を検討予定であったが、一般化を研究する時間がなかったのが残念である。

本論文では C.Baez と G.Egan の共同研究 [Bae24a] に基づいて、ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  とアイゼンシュタイン整数環の関係について考察した。具体的には、 $\mathbb{R}^4$  にミンコフスキー計量を入れたミンコフスキー時空間  $M^4$  を考え、 $M^4$  の部分空間である 3次元双曲空間  $\mathcal{W}$  を定義して、 $\mathcal{W}$  中の 6 角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  (Schläfli 記号) について考察する。ただし、

$$\mathcal{W} := \{A \in \text{Her}(2, \mathbb{C}) \mid \det A = 1, \text{Tr}(A) > 0\} \quad (3 \text{次元双曲空間})$$

である。

3次元双曲空間を視覚的に捉えることは困難だが、ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  は、各面が 6 角形であり、各正多胞体では頂点に 3 つの面が集まり、各辺のまわりに 3 つの正多胞体が集まるような構造を持っている。具体的には、下図 Figure1 のような構造となる。

一般にミンコフスキー時空間  $M^4$  とエルミート行列の間には計量を保つ同型対応があることが知られている。そして、6 角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の頂点や面、辺などは、行列式が 1 でありトレースが正であるエルミート行列を用いて表すことができる。本論文では、このエルミート行列を用いた表示を主に用いる。

6 角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の各面（6 角形）の中心全体を  $C \subset \mathcal{W}$  と書くと、次の定理が C. Baez と G. Egan によって示された。

**定理 1.1** (Baez-Egan [Bae24b; Bae24a]). 6 角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の各面（6 角形）の中心全体を  $C$  とすると、それはアイゼンシュタイン整数を成分とする  $\mathcal{W}$  に属するエルミート行列の点全体と一致する。

$$C = \text{Her}(2, \mathbb{E}) \cap \mathcal{W}$$

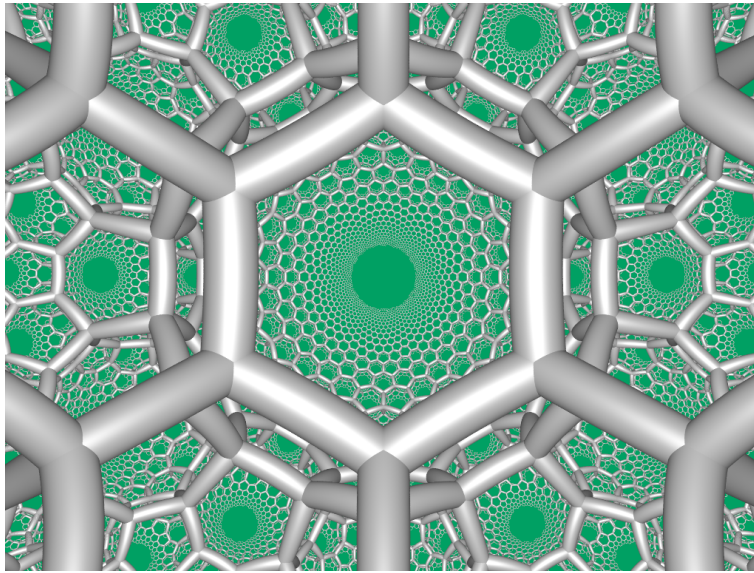


Figure 1: 6 角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  全体

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal\\_tiling\\_honeycomb#/media/File:H3\\_633\\_FC\\_boundary.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal_tiling_honeycomb#/media/File:H3_633_FC_boundary.png)

以下, C.Baez と G.Egan の研究に基づき, 計算の詳細を埋めながら上の定理を証明することを目標とする.

## 1.2 主結果

本論文では, 以下について調べ整理をした.

1. ミンコフスキー時空間と 2 次元エルミート行列全体の間の計量を保つ同型
2. 双曲空間内のハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の基本的な構造とアイゼンシュタイン整数の性質
3. ハニカムの対称性を表す Coxeter 群  $[6, 3, 3]$  の生成元とハニカム全体への作用
4. ハニカムの面の中心全体とアイゼンシュタイン整数を成分とするエルミート行列 (行列式が 1 でトレースが正) が 1 対 1 対応していることは定理 5.8 で, 一方向の包含関係だけを示すことができた.

### 1.3 本論文の構成

まず, § 2では、今回検討するハニカム  $\{6, 3, 3\}$  を含む空間, ミンコフスキー時空間とエルミート行列との計量を込めた対応について説明をする.

次に, § 3でアイゼンシュタイン整数の性質を述べたあと, § 4ではハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の定義と基本的な性質について図を含めて説明をする.

最後の § 5では, 基本となる1つの6角形に対してアイゼンシュタイン整数を成分とする行列  $GL(2, \mathbb{E})$  を作用させることでハニカムを構成する6角形全体を座標を含めて具体的に表すことができることを説明する.

## 2 ミンコフスキー時空間内の点の表示

### 2.1 ミンコフスキー時空間

**定義 2.1** (ミンコフスキー計量). 4次元実ベクトル

$$\mathbf{x} = {}^t(t_1, x_1, y_1, z_1), \mathbf{y} = {}^t(t_2, x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^4$$

に対して, ミンコフスキー計量  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L$  を以下で定義する.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L := t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \quad (2.1)$$

このミンコフスキー計量は4次の正方行列  $J_{1,3} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  を用いて,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L = {}^t \mathbf{x} J_{1,3} \mathbf{x} = t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \quad (2.2)$$

と表すこともできる. また  $\mathbf{x} = {}^t(t, x, y, z)$  に対して, 2次形式で表すと次のようにも書ける.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.3)$$

**定義 2.2** (ミンコフスキー時空間). 4次元実ベクトル空間  $\mathbb{R}^4$  に対して, ミンコフスキー計量を導入した空間をミンコフスキー時空間といい,  $M^4$  と表す. また,

$$\mathcal{W} := \{\mathbf{x} \in M^4 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L = 1, t > 0\}$$

を双曲空間と呼ぶ

**定理 2.3** (双曲空間内の距離). 2点  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$  の間の双曲距離  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に対して以下が成り立つ.

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cosh^{-1}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L) \quad (2.4)$$

**証明.** 証明は省略する. [平井武 01, (15.24) 式 (p.249)] を参照.  $\square$

## 2.2 エルミート行列

**定義 2.4** (2 次複素エルミート行列).  $A^* = \overline{A}^t$  において,

$$\begin{aligned}\text{Her}(2, \mathbb{C}) &:= \{A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid A = A^*\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & x + iy \\ x - iy & d \end{pmatrix} \mid a, d, x, y \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

と書く.  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  に属する行列をエルミート行列という.

## 2.3 ミンコフスキー時空間と 2 次複素エルミート行列全体の同型

**定理 2.5.** ミンコフスキー時空間  $M^4$  と 2 次エルミート行列全体  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  は計量をこめて同型である. 同型写像は,

$$\begin{array}{ccc} \Phi: & M^4 & \cong \\ & \Downarrow & \\ & & \text{Her}(2, \mathbb{C}) \\ & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = {}^t(t, x, y, z) & \longmapsto & \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} t + z & x + iy \\ x - iy & t - z \end{pmatrix} \end{array}$$

で与えられて,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L = \det \Phi(\mathbf{x})$$

が成り立つ.

**証明.**  $\Phi$  を定理のように決めると

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \delta \end{pmatrix} \in \text{Her}(2, \mathbb{C})$$

に対して, 逆写像  $\Phi^{-1}$

$$\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{x})) := {}^t\left(\frac{\alpha + \delta}{2}, \frac{\beta + \overline{\beta}}{2}, \frac{\beta - \overline{\beta}}{2i}, \frac{\alpha - \delta}{2}\right)$$

が定まる.  $\Phi$  は  $M^4$  と  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  の間の全単射写像となる. また,

$$\det A = (t + z)(t - z) - (x + iy)(x - iy) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L$$

より, 写像  $\Phi$  は計量を保存する. □

**補題 2.6.**  $M^4$  の計量を保つ自己同型群として次が挙げられる.

$$O(1, 3) := \{g \in GL(2, \mathbb{C}) \mid gJ_{1,2}^t g = J_{1,2}\} \quad (\text{計量を保存する})$$

$$SO(1, 3) := \{g \in O(1, 3) \mid \det g = 1\} \subset O(1, 3) \quad (\text{計量と向きを保存する})$$

$$SO_0(1, 3) := \{g \in SO(1, 3) \mid t \geq 1\} \subset SO(1, 3) \quad (\text{連結かつ計量と向きを保存})$$

と表される.

**証明.** これについては, 例えば [平井武 01, §§15-17] を参照して欲しい. □

**補題 2.7.**  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  は以下のように  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  に作用する.

$$\Psi(g): A \longmapsto gAg^* \quad (A \in \text{Her}(2, \mathbb{C}))$$

このとき,  $\Psi(g)$  は計量を保つ.

**証明.** 以降のことを考えて  $g \in GL(2, \mathbb{C})$  かつ  $|\det g| = 1$  であるとしておく. このとき,  $g \in SL(2, \mathbb{C})$  でも  $|\det g|^2 = 1$  を満たす.

任意の  $A \in \text{Her}(2, \mathbb{C})$  について

$$\det \Psi(g)A = \det(gAg^*) = \det g \det A \det g^* = |\det g|^2 \det A = \det A \quad (2.5)$$

よって,  $\Psi(g)$  は  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  の計量を保存する. □

**補題 2.8.**  $SL(2, \mathbb{C})$  の作用は  $\mathcal{W}$  を保存する.

**証明.** 任意の  $A \in \text{Her}(2, \mathbb{C})$  に対して, まず  $\Psi(g)$  が行列式を保存し, 次にトレースの符号を保存することを示す.

計量の保存 補題 2.7 より  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  全体で行列式が保存されて,  $\mathcal{W} \subset \text{Her}(2, \mathbb{C})$  であるから  $\mathcal{W}$  においても行列式は保存される.

トレースの符号の保存 トレースの符号の保存を以下の順序で示す.

- ①  $\Psi(g)(1_2) = gg^* \in \mathcal{W}$
- ②  $\mathcal{W}$  は連結であって, 任意の  $A \in \mathcal{W}$  は  $1_2$  と連続な道で結ぶことができる.
- ③  $A \in \mathcal{W} \implies \text{Tr } \Psi(g)A > 0$

①  $\Psi(g)1_2 = gg^* \in \mathcal{W}$  を示す. つまり,  $\Psi(g)1_2$  が計量とトレースの符号を保存することを示す.

まず行列式（計量）については

$$\det \Psi(g)1_2 = \det gg^* = 1 \quad (2.6)$$

が成り立つ. つぎに, トレースについて考えると

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\Psi(g)1_2) &= \operatorname{Tr}(gg^*) = \operatorname{Tr}(g^*g) = (g^*g\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + (g^*g\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\ &= (g\mathbf{e}_1, g\mathbf{e}_1) + (g\mathbf{e}_2, g\mathbf{e}_2) = \|g\mathbf{e}_1\|^2 + \|g\mathbf{e}_2\|^2 > 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

ただし,  $\mathbf{e}_1 = {}^t(1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = {}^t(0, 1)$  は基本ベクトルである. よって, 式 (2.6), (2.8) より  $\det(\Psi(g)1_2) = 1$  かつ  $\operatorname{Tr}(\Psi(g)1_2) > 0$  なので,

$$\Psi(g)1_2 \in \mathcal{W} \quad (2.8)$$

②  $\mathcal{W}$  が連結であることを示すために,  $\mathcal{W}$  が連結な群  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  の作用であることを示そう. 任意の  $A \in \mathcal{W}$  に対して特殊ユニタリ行列  $u \in \operatorname{SU}(2)$  で対角化すると,

$$A \longrightarrow uAu^* = uAu^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_{>0})$$

ここで,  $\det A = 1$  かつ  $\operatorname{Tr}(A) > 0$  であり, エルミート行列をユニタリ行列で対角化した場合, 行列式とトレースは保たれるので  $\det uAu^* = 1$  かつ  $\operatorname{Tr}(uAu^*) > 0$  となることに注意する.

$uAu^*$  に対して  $h = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$  を用いて作用  $\psi$  を施すと

$$\Phi(uAu^*) = h(uAu^*)h^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} = 1_2$$

よってこの逆を行うと,

$$u^{-1}(h^{-1}1_2(h^*)^{-1})u = A \quad (2.9)$$

従って,  $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot 1_2 = \mathcal{W}$  である.

このことから  $\mathcal{W}$  は連結であることがわかる.

③  $A \in \mathcal{W} \implies \operatorname{Tr} \Psi(g)A > 0$  を示す.  $\mathcal{W}$  は連結であるから  $1_2, A \in \mathcal{W}$  の間に連続関数  $X(t) (t \in \mathbb{R}_{>0})$  が構成できて,  $X(0) = 1_2, X(1) = A$  を満たす.

このとき,  $\operatorname{Tr} gAg^* \neq 0$  (以降の補題 (2.9) で示す) であって, もし  $\operatorname{Tr}(gAg^*) > 0$  の場合, 示すことはない. そこで,  $\operatorname{Tr} gAg^* < 0$  の場合を考える. 上の  $1_2$  と  $A$  を結ぶ道  $X(t)$  を考えると,  $\operatorname{Tr} X(0) = 2 > 0 > \operatorname{Tr} X(1) = \operatorname{Tr} gAg^*$  となるが,  $X(t)$  は連続なので, これは中間値の定理に矛盾する. したがってこの場合は起こりえず, 任意の  $A$  に対して  $\operatorname{Tr}(gAg^*) > 0$ .

以上より, 任意の  $A \in \mathcal{W}$  に対して,  $\det \Psi(A) = \det A = 1$  かつ  $\operatorname{Tr}(\Psi(A)) > 0$  より  $\Psi$  は  $\mathcal{W}$  を保存する.  $\square$



補題 2.9.

$$A \in \text{Her}(2, \mathbb{C}), \det A = 1 \implies \text{Tr } A \neq 0 \quad (2.10)$$

**証明.** エルミート行列  $A$  の固有値  $\alpha, \beta$  は  $\det A = 1$  より、 $\alpha\beta = 1$  なので  $\alpha, \beta$  はどちらも 0 でない。また、 $\alpha\beta = 1 > 0$  より  $\alpha, \beta$  は同符号で、 $\text{Tr } A = \alpha + \beta$  は正または負であり、0 になることはない。  $\square$

補題 2.8 と同様にして、 $\Psi(g)$  ( $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ ) は  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  において行列式 (計量) とトレース (向き) を保つ。この作用は

$$\begin{aligned} \forall A, B \in \text{Her}(2, \mathbb{C}), \quad \Psi(g)(A + B) &= gAg^* + gBg^* = \Psi(g)A + \Psi(g)B \\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \Psi(g)\lambda A &= g\lambda Ag^* = \lambda gAg^* = \lambda \Psi(g)A \end{aligned}$$

より線型なので、 $\text{Her}(2, \mathbb{C}) \simeq M^4$  を通して、ミンコフスキー時空間の自己同型  $O(1, 3)$  を引き起こす。これを  $f(g) : M^4 \rightarrow M^4$  と書く。

**定理 2.10.** 上のように決まった写像  $f : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO_0(1, 3)$  は準同型である。この準同型によって  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  は  $SO_0(1, 3)$  の 2 重被覆になり、

$$\text{Ker}(f) = \{\pm 1_2\} \quad (2.11)$$

が成り立つ。

**証明.** まず、準同型写像であることは明らかだから  $f$  の核を求めよう。

任意の  $g \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  は、 $\text{Her}(2, \mathbb{C}) \simeq M^4$  への作用が計量を保つから  $O(1, 3)$  に入りトレースを保つので、向きを保存するから  $SO(1, 3)$  に入る。また単位元の連結成分に入っているのので  $SO_0(1, 3)$  に属する。以上より  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  から  $SO_0(1, 3)$  への全射準同型写像  $f$  が得られた。

次に  $f$  の核を求める。

$$\text{Ker}(f) = \{g \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \mid \forall A \in \text{Her}(2, \mathbb{C}), gAg^* = A\}$$

より、 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ) とすると、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Her}(2, \mathbb{C})$  に対して、

$$gAg^* = \begin{pmatrix} |a|^2 & a\bar{c} \\ \bar{a}c & |c|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} |a| = 1 \iff a = \pm 1 \\ |c| = 0 \iff c = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Her}(2, \mathbb{C})$  に対して,

$$gBg^* = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ d = \pm 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

よって、

$$(a, d, c, d) = (\pm 1, 0, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \mp 1, 0)$$

であるが、 $\det A = ad - bc = ad = 1$  なので、 $a, d$  の正負は一致するので、 $(a, d, c, d) = (\pm 1, 0, \pm 1, 0)$  (複合同順)

従って、任意の  $S$  に対して  $gAg^* = A$  を満たせば、核に属する元  $g$  は

$$g = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm 1_2$$

となる。 □

### 3 アイゼンシュタイン整数

#### 3.1 アイゼンシュタイン整数の定義

**定義 3.1.** (アイゼンシュタイン整数環  $\mathbb{E}$ )  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  (1 の原始 3 乗根) として、

$$\mathbb{E} := \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega \quad (3.1)$$

とおくと、 $\mathbb{E}$  は和・差と積で閉じており、環をなす。これをアイゼンシュタイン整数環と呼ぶ。

**定義 3.2.** (単元群  $R^\times$ ) 環  $R$  に対して、逆元が存在する元の集合を単元群  $R^\times$  といい、単元群の元を単元という。つまり、

$$R^\times := \{a \in R \mid \exists a^{-1} \in R, aa^{-1} = 1\} \quad (3.2)$$

**補題 3.3.**  $\mathbb{E}$  の単元群  $\mathbb{E}^\times$  に対して、

$$x \in \mathbb{E}^\times \iff |x|^2 = 1 \quad (3.3)$$

が成り立つ。

**証明.**  $(\implies)$  の証明

$$x \in \mathbb{E} \iff xx^{-1} = 1 \implies |x|^2 |x^{-1}|^2 = 1$$

いま,  $|x|^2, |x^{-1}|^2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  より,

$$|x|^2 = 1$$

$(\impliedby)$  の証明

$$|x|^2 = 1 \iff x\bar{x} = 1 \implies x, \bar{x} \in \mathbb{E}^\times$$

□

**定理 3.4.**  $\mathbb{E}$  の単元群は

$$\mathbb{E}^\times = \{\pm 1, \pm \omega, \pm(1 + \omega)\} \quad (3.4)$$

である.

**証明.**  $x = a + b\omega \in \mathbb{E}^\times$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ) とする.

$$x \in \mathbb{E}^\times \iff |x|^2 = 1 \iff a^2 - ab + b^2 = 1 \iff \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}b^2 = 1$$

ここで,  $a^2, (a-b)^2, b^2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  より,  $a^2, (a-b)^2, b^2$  のいずれか 1 つは 0 なので

$$\begin{cases} a^2 = 0 & \implies (a, b) = (0, \pm 1) \\ (a-b)^2 = 0 & \implies (a, b) = (\pm 1, \pm 1) \\ b^2 = 0 & \implies (a, b) = (\pm 1, 0) \end{cases} \quad (3.5)$$

よって,  $\mathbb{E}^\times = \{\pm 1, \pm \omega, \pm(1 + \omega)\}$  がわかる. □

**定義 3.5.** (アイゼンシュタイン整数を成分とするエルミート行列)  $A \in \text{Her}(2, \mathbb{C})$  かつ成分がすべて  $\mathbb{E}$  の元である行列全体を  $\text{Her}(2, \mathbb{E})$  と表す. つまり,

$$\text{Her}(2, \mathbb{E}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b + c\omega \\ b + c\bar{\omega} & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

である.

## 4 6 角形ハニカムの定義と性質

双曲空間を

$$\mathcal{W} := \{A \in \text{Her}(2, \mathbb{C}) \mid \det A = 1, \text{Tr}(A) > 0\} \subset M^4$$

と定める.  $\mathcal{W}$  の内部で, 6 角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  を考えて, その構造について調べる.

## 4.1 6角形ハニカムの定義

**定義 4.1** (ハニカム [Cox56; Cox73]). 双曲空間を正多胞体で充填する構造をハニカムという. ただし, 正多胞体とは, 各面が正多角形であるような多面体である. (面の数は無限個存在してもよい.) ハニカムはシュレフリ記号を用いて分類され, シュレフリ記号  $\{p, q, r\}$  と書くとき,  $p, q, r$  は以下を表す.

- $p$ : 各面は  $p$  角形である
- $q$ : 各面の頂点に集まる面の数
- $r$ : 1つの辺のまわりに集まる面の数

**定理 4.2.** ハニカム  $\{p, q, r\}$  の正多胞体の面の1辺の長さを  $2\phi$ , 正多胞体の外接円の半径を  $\chi$ , 内接円の半径を  $\psi$  とする. また,  $h_{q,r}$  は以下の式によって定める.

$$\cos^2 \frac{\pi}{h_{q,r}} = \cos^2 \frac{\pi}{q} + \cos^2 \frac{\pi}{r} \quad (4.1)$$

このとき, 次の関係式が成り立つ.

$$\cosh \phi = \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{r} / \sin \frac{\pi}{h_{q,r}} \quad (4.2)$$

$$\cosh \chi = \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{r} / \sin \frac{\pi}{h_{p,q}} \quad (4.3)$$

$$\cosh \psi = \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} / \sin \frac{\pi}{h_{p,q}} \sin \frac{\pi}{h_{q,r}} \quad (4.4)$$

**定義 4.3** (6角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$ ).  $\mathcal{W}$  内の6角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  は以下を満たす.

- 各面は6角形である
- 各面の頂点に3個の面が集まる
- 1つの辺のまわりに3つの面が集まる

それを図示すると図 2 および 図 3 のようになる. ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の正多胞体は無限個の面を持っている. 下図 Figure2,4 は Wikipedia からの引用で, 下図 Figure3 は G.Egan のホームページから引用した.

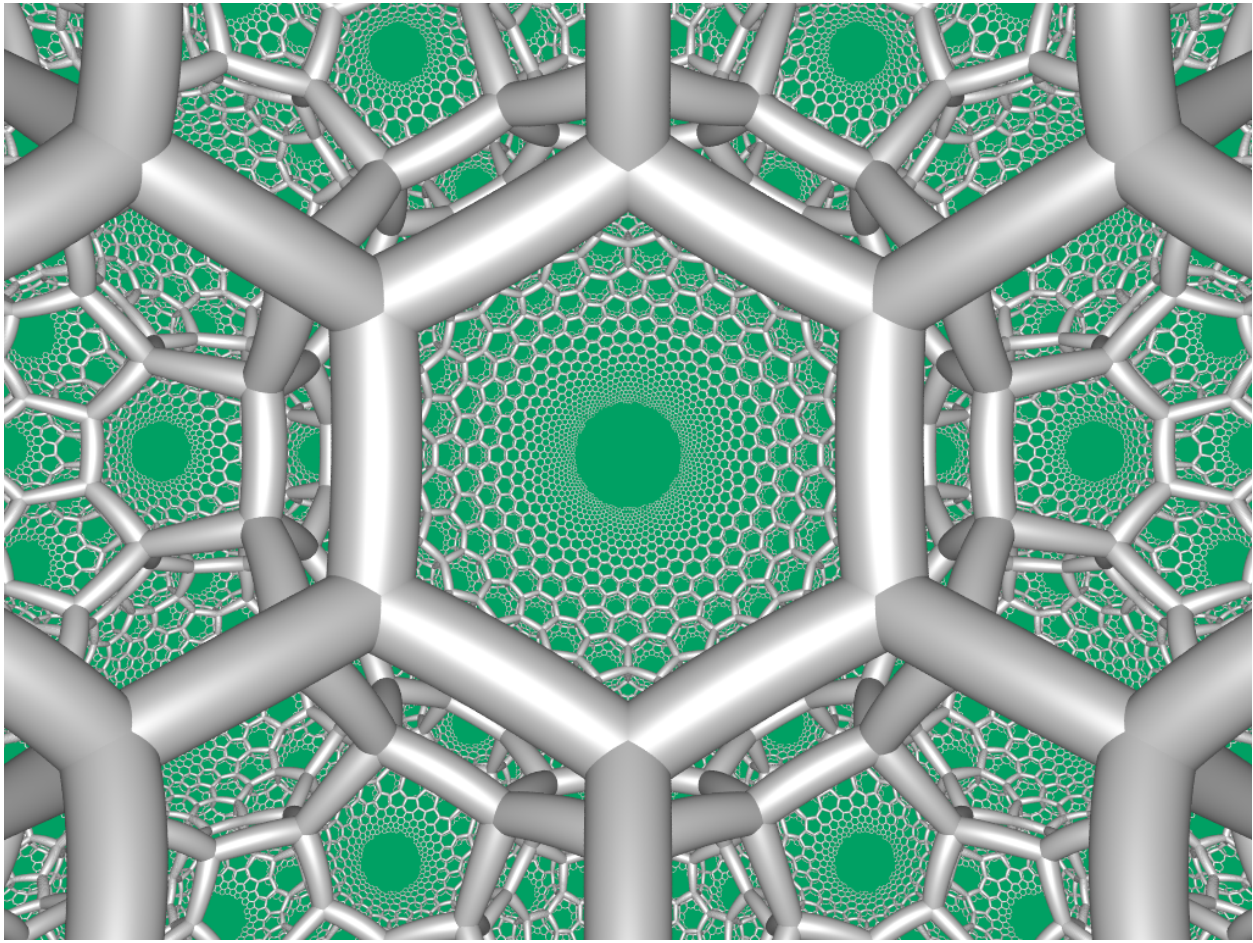


Figure 2: 6 角形ハニカム  $\{6,3,3\}$  の全体

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal\\_tiling\\_honeycomb](https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal_tiling_honeycomb)

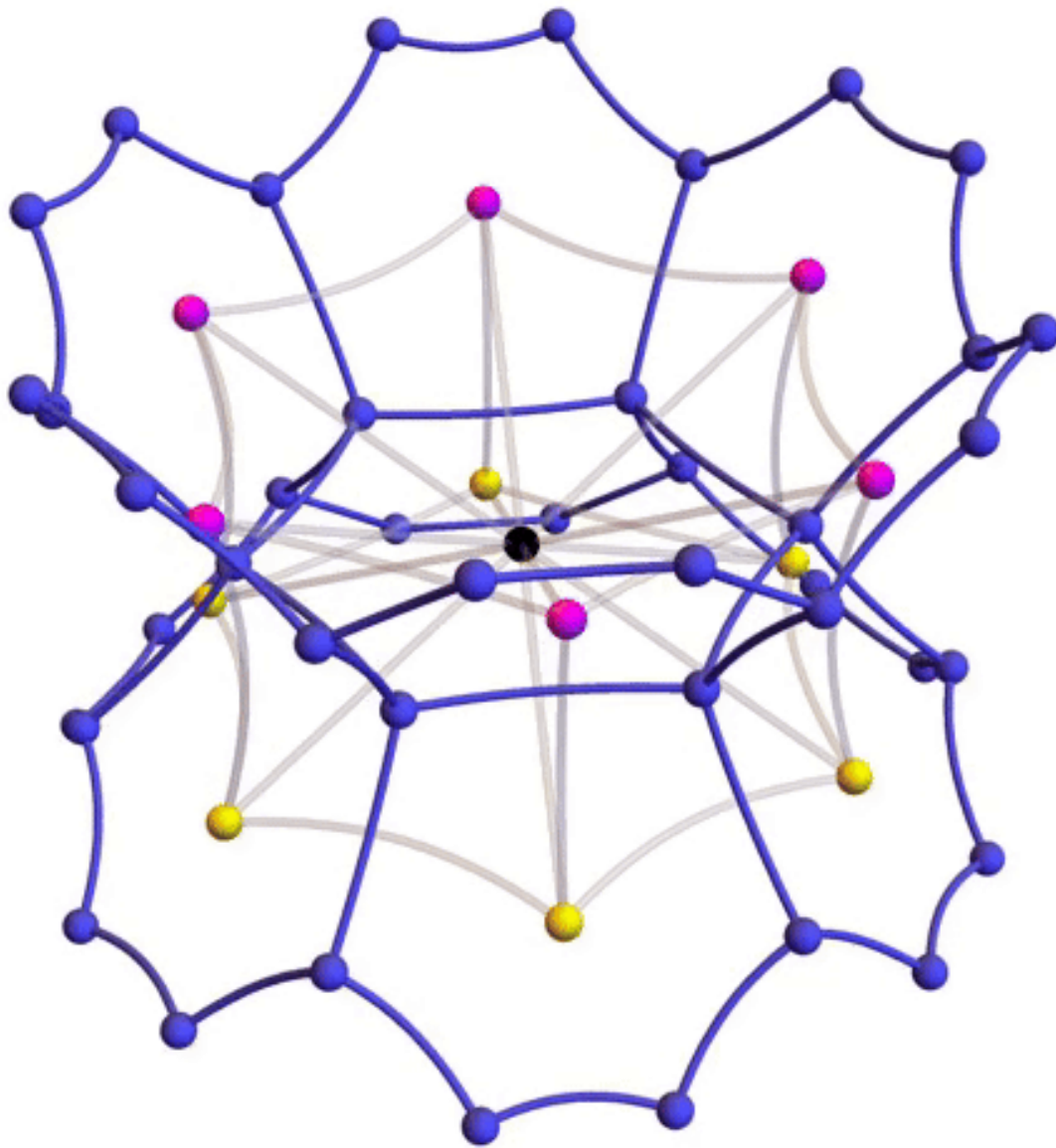


Figure 3: 基本6角形と隣接する6角形

<https://mathstodon.xyz/@gregeganSF/112337198859626121>



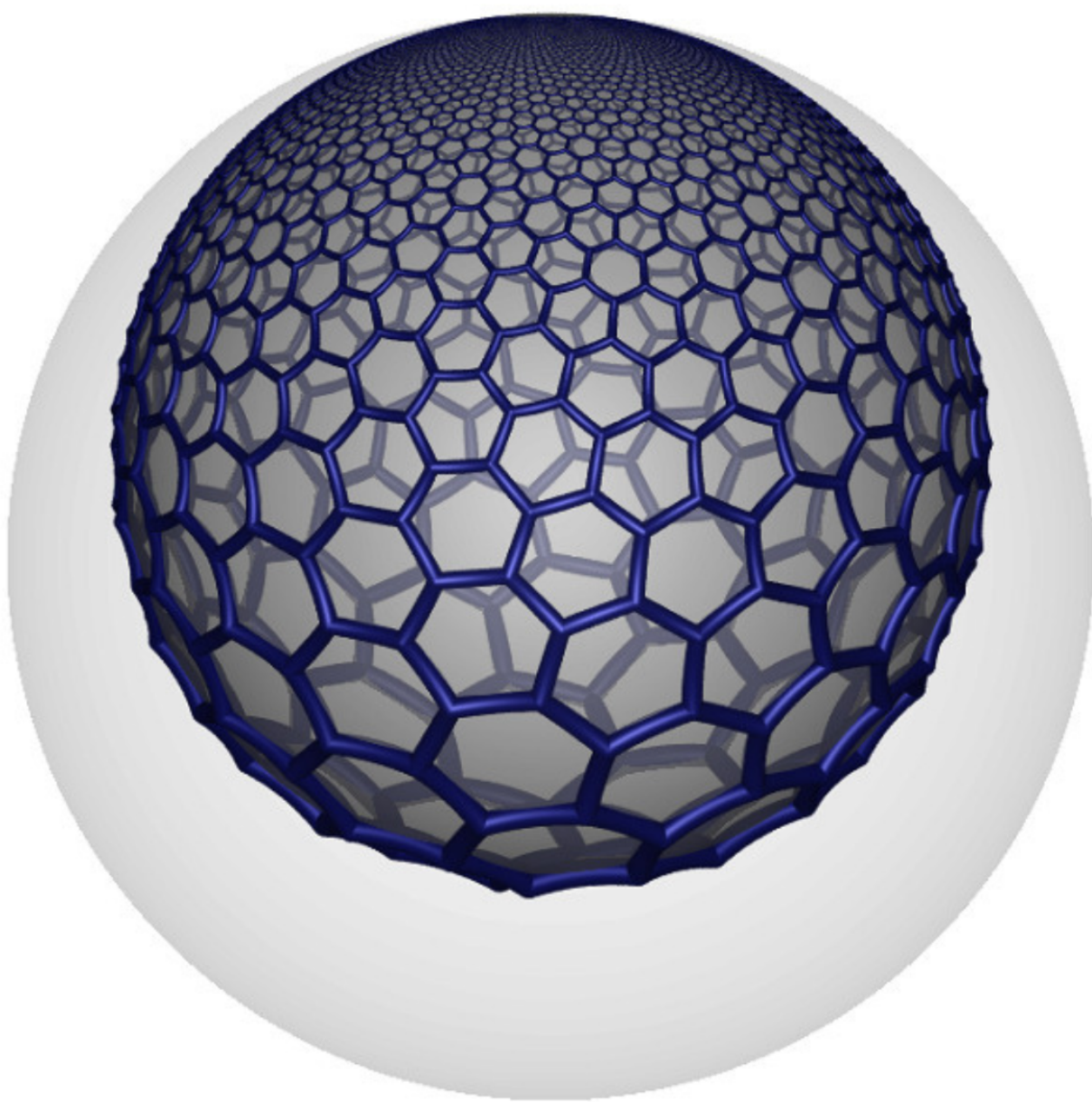


Figure 4: 6 角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  一つの正多胞体

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal\\_tiling\\_honeycomb#/media/File:633\\_honeycomb\\_one\\_cell\\_horosphere.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal_tiling_honeycomb#/media/File:633_honeycomb_one_cell_horosphere.png)

定理 4.2 より以下が定まる.

$$(\text{同一面内の頂点と面の中心の距離}) = \cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad (4.5)$$

$$(\text{同一面の隣り合う頂点同士の距離}) = \cosh^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \quad (4.6)$$

$$(\text{隣接する 6 角形の中心間の距離}) = \cosh^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \quad (4.7)$$

式 (4.6) については, 定理 4.2 から求まる. 式 (4.5), (4.7) については, 導出の過程をたどることが難しかったため, 下記から引用している.

引用: <https://mathstodon.xyz/@gregeganSF/112319204044563705>

## 4.2 六角形ハニカムの諸量

これをもとに, ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の諸量を明らかにしていこう.

まず, 単位行列  $1_2 \in \mathcal{W}$  を中心とする基本 6 角形を考える. このとき, 基本 6 角形の 6 つの頂点全体  $V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  は具体的に求まる.

引用: <https://mathstodon.xyz/@gregeganSF/112319204044563705>

**補題 4.4.** 基本 6 角形の頂点の座標は,

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 & \pm(1+2\omega) \\ \pm(1+2\omega) & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \pm(1-\omega) \\ \pm(1-\omega) & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \pm(2+\omega) \\ \pm(2+\omega) & 3 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.8)$$

である.

**証明.** 具体的な導出過程をたどることは難しかったため, 下記から引用している. 引用: [Bae24b]. □

また, 各頂点を次のように順序をつけておく.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & 1+2\omega \\ 1+2\omega & 3 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & -1+\omega \\ -1+\omega & 3 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & -2-\omega \\ -2-\omega & 3 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & -1-2\omega \\ -1-2\omega & 3 \end{pmatrix}, v_5 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & 1-\omega \\ 1-\omega & 3 \end{pmatrix}, v_6 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & 2+\omega \\ 2+\omega & 3 \end{pmatrix}$$

このように定めると, 各頂点の位置関係は図の通りになる.



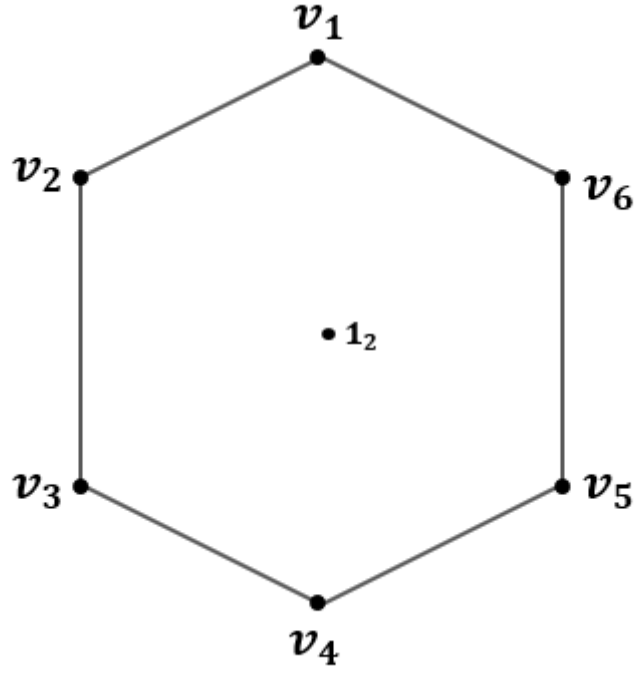


Figure 5: 基本6角形

次に、基本6角形  $\mathcal{H}$  に隣接する6角形について考える．一度、記号を整理しておく．

**定義 4.5** (ハニカムの六角形). 基本6角形に関する記号を次のように定める．

1.  $\mathcal{H}_0$  : 基本6角形
2.  $V_0$  : 基本6角形の頂点全体
3.  $v_k$  : 基本6角形の頂点 ( $k = 1, \dots, 6$ )
4.  $C_0$  : 基本6角形の中心 (単位行列をとる)

基本6角形に隣接する6角形に関する記号を次のように定める． $k = 1, \dots, 6$  とする．

1.  $\mathcal{H}_k^+$  : 基本6角形に隣接し頂点  $v_k, v_{k+1}$  を共有するもののうち、Figure 2 の上部にある6角形
2.  $\mathcal{H}_k^-$  : 基本6角形に隣接し頂点  $v_k, v_{k+1}$  を共有するもののうち、Figure 2 の下部にある6角形

3.  $C_k^+ : \mathcal{H}_k^+$  の中心

4.  $C_k^- : \mathcal{H}_k^+$  の中心

## 5 6角形ハニカムと作用

### 5.1 $GL(2, \mathbb{E})$ のハニカムへの作用

**定理 5.1.**  $GL(2, \mathbb{E})$  は  $\text{Her}(2, \mathbb{C})$  に次のように作用している.

$$A \longmapsto gAg^* \quad (A \in \text{Her}(2, \mathbb{C}), g \in GL(2, \mathbb{C})) \quad (5.1)$$

このとき,  $|\det g| = 1$  ならば, ミンコフスキー計量を保存して,  $\mathcal{W}$  に作用する.

**証明.** 補題 2.8 と同様にして示すことができる. □

**定理 5.2.** 基本6角形  $\mathcal{H}$  上の中心  $C_0 = 1_2$  を固定する  $GL(2, \mathbb{E})$  に属する変換は

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{E}^\times) \quad (5.2)$$

である.

**証明.**  $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{E})$  を中心に作用させて

$$\sigma 1_2 \sigma^* = 1_2 \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \\ |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \\ \alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{E}, |x| \geq 1$  または  $|x| = 0$  より,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \iff \alpha \in \mathbb{E}^\times, \beta = 0 \quad \text{または} \quad \alpha = 0, \beta \in \mathbb{E}^\times$$

(I)  $\alpha \in \mathbb{E}^\times, \beta = 0$  のとき.

$$\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0 \iff \alpha\bar{\gamma} = 0 \iff \gamma = 0$$

このとき,

$$|\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1 \iff |\delta|^2 = 1 \iff \delta \in \mathbb{E}^\times$$

よって,

$$\alpha \in \mathbb{E}^\times, \beta = 0 \implies \alpha, \delta \in \mathbb{E}^\times, \beta = \gamma = 0$$

である.

(II)  $\alpha = 0, \beta \in \mathbb{E}^\times$  のとき. 同様にして

$$\alpha = 0, \beta \in \mathbb{E}^\times \implies \alpha, \delta \in \mathbb{E}^\times, \beta = \gamma = 0$$

以上より, 中心  $C_0$  を固定する変換  $\sigma$  は次の形をしていることが分かった.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

実際に,  $u = \begin{pmatrix} 3 & u \\ \bar{u} & 3 \end{pmatrix} \in V_0$  に対して,  $\sigma u \sigma^*$  を計算すると, 以下がわかる.

$$\sigma_1 u \sigma_1^* = \begin{pmatrix} 3 & \alpha_1 \bar{\alpha}_2 u \\ \bar{\alpha}_1 \alpha_2 \bar{u} & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 u \sigma_2^* = \begin{pmatrix} 3 & \beta_1 \bar{\beta}_2 \bar{u} \\ \bar{\beta}_1 \beta_2 u & 3 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1$  での変換

- $\alpha_1 \bar{\alpha}_2 = 1$  のとき, 恒等変換
- $\alpha_1 \bar{\alpha}_2 = \pm \omega$  のとき,  $\pm 60^\circ$  回転
- $\alpha_1 \bar{\alpha}_2 = \pm \omega^2$  のとき,  $\pm 120^\circ$  回転
- $\alpha_1 \bar{\alpha}_2 = -1$  のとき,  $\pm 180^\circ$  回転

$\sigma_2$  での変換

$m_{k,k+1}$  を  $v_k$  と  $v_{k+1}$  の中点とする.

- $\beta_1 \bar{\beta}_2 = 1$  のとき,  $m_{2,3}$  と  $m_{5,6}$  のを結ぶ辺に関する鏡映
- $\beta_1 \bar{\beta}_2 = \omega$  のとき,  $v_2$  と  $v_5$  のを結ぶ辺に関する鏡映
- $\beta_1 \bar{\beta}_2 = \omega^2$  のとき,  $m_{1,2}$  と  $m_{4,5}$  のを結ぶ辺に関する鏡映
- $\beta_1 \bar{\beta}_2 = -1$  のとき, 恒等変換
- $\beta_1 \bar{\beta}_2 = -\omega$  のとき,  $v_3$  と  $v_6$  のを結ぶ辺に関する鏡映
- $\beta_1 \bar{\beta}_2 = -\omega^2$  のとき,  $m_{3,4}$  と  $m_{6,1}$  のを結ぶ辺に関する鏡映

以上より, 変換  $\sigma$  によって  $\mathcal{K}_0$  の任意の頂点は  $\mathcal{K}_0$  の任意の頂点へ移すことができることがわかる. □

## 5.2 Coxeter 群

**定義 5.3** (Coxeter 群). 生成系  $S$  をもつ群  $W$  が Coxeter 群であるとは, 以下を満たすことである.

1.  $\forall s \in S, s^2 = 1$
2.  $\forall s, t \in S, s \neq t \implies \exists m_{s,t} \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \cup \{\infty\}, (st)^{m_{s,t}} = 1$  (組み紐関係式)
3. 1,2 以外に生成元の間に関係が存在しない.

このとき, 組  $(W, S)$  を Coxeter 系という.

**定理 5.4** ([MSW19]). 行列  $R_0, R_1, R_2, R_3$  を以下で定義する.

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また, 変換  $\rho_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) を

$$\rho_k : A \longmapsto R_k A R_k^* \quad (A \in \text{Her}(2, \mathbb{C}))$$

と定義すると, 六角形ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  に関する Coxeter 群  $[6, 3, 3]$  は生成元  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  を用いて表現できて, 以下の関係式を満たす.

$$\rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_3^2 = 1 \tag{5.3}$$

$$(\rho_0 \rho_1)^3 = (\rho_1 \rho_2)^3 = (\rho_2 \rho_3)^6 = (\rho_0 \rho_2)^2 = (\rho_0 \rho_3)^2 = (\rho_1 \rho_3)^2 = 1 \tag{5.4}$$

**証明.** 実際に計算をすることで, 式 (5.3), (5.4) の成立がわかる. □

## 5.3 基本六角形に対する作用

**補題 5.5.** 変換  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  は六角形ハニカム上で以下の作用を意味する.

$\rho$	基本6角形の頂点の変換	6角形の中心の変換	変換の意味
$\rho_0$	$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ v_4 & v_3 & v_2 & v_1 & v_6 & v_5 \end{pmatrix}$	$C_2^+ \leftrightarrow C_2^-, C_1^\pm \leftrightarrow C_3^\mp$ $C_5^+ \leftrightarrow C_5^-, C_4^\pm \leftrightarrow C_6^\mp$	$v_2, v_3$ の中点と $v_5, v_6$ の中点を 結ぶ直線に関する 180° 回転
$\rho_1$	$v_2, v_3$ を固定	$C_2^+ \leftrightarrow C_2^+$ $C_0^+ \leftrightarrow C_2^-$	面 $\mathcal{H}_2^+$ に関する鏡映
$\rho_2$	$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ v_4 & v_3 & v_2 & v_1 & v_6 & v_5 \end{pmatrix}$	$C_1^\pm \rightarrow C_2^\pm \rightarrow C_3^\pm$ $\rightarrow C_4^\pm \rightarrow C_5^\pm \rightarrow C_6^\pm$ $\rightarrow C_1^\pm$ (複合同順)	基本6角形の中心 $C_0$ を中心とした 60° 回転
$\rho_3$	恒等変換	恒等変換	恒等変換

この表より基本6角形の中心  $C_0$  を隣接する任意の6角形の中心  $C_k^\pm$  に移す変換  $\tau_k^\pm$  は次のように書けることがわかる。ただし、 $k = 1, \dots, 6$  である。

$$\tau_k^+ : C_0 \mapsto (\rho_2)^{k-2} \rho_0 \rho_1(C_0) = C_k^+ \quad (5.5)$$

$$\tau_k^- : C_0 \mapsto (\rho_2)^{k-2} \rho_1(C_0) = C_k^- \quad (5.6)$$

**証明.** 補題 5.5 の表は基本6角形の頂点と中心  $C_0$  への作用  $R_k v_k R_k^*, R_k R_k^*$  を計算することでわかる。

$C_k^\pm$  について、まず中心  $C_0$  に対して  $\rho_1$  を作用させ、 $C_2^-$  に移し、次に  $C_2^-$  に対して  $\rho_0$  を作用させ  $C_2^+$  に移す。最後に、 $\rho_2$  を連続的に作用させることで、すべての  $C_k^+$  が求まる。

同様にして、 $C_k^-$  も求まる。  $\square$

## 5.4 すべての6角形に対する作用

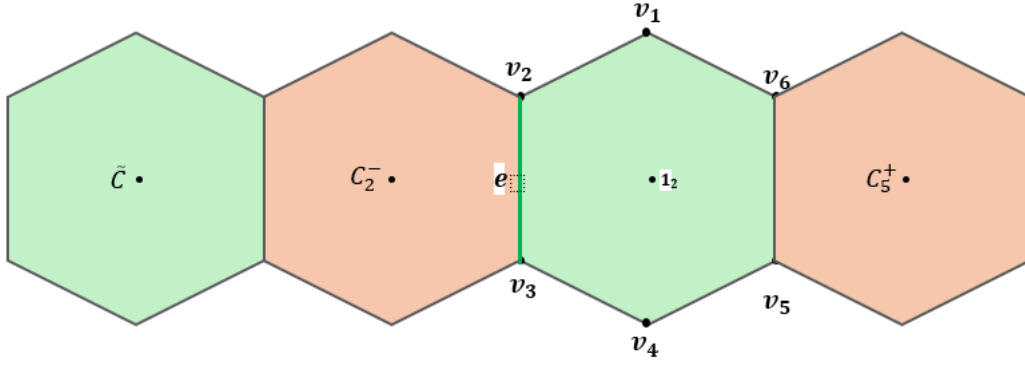
**補題 5.6.** 補題 5.5 の (5.5), (5.6) と同様に生成元  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  を用いて基本6角形の中心  $C_0$  を  $\mathcal{H}_k^+, \mathcal{H}_k^-$  に隣接する6角形の中心に移すことができる。

**例 5.7.**  $\mathcal{H}_2^+$  に隣接する6角形を用いて、変換の具体例を挙げる。

基本6角形  $\mathcal{H}, \mathcal{H}_2^-, \mathcal{H}_5^+, \mathcal{H}_2^-$  が持つ辺  $e$  を共有する6角形  $\tilde{\mathcal{H}}$  を図のように平面的に表す。

いま、 $C_2^+ = \rho_0 \rho_1, C_5^+ = \rho_2^3 \rho_0 \rho_1$  で、 $\tilde{\mathcal{H}}$  の中心  $\tilde{C}$  は、 $C_5^+$  の  $v_2, v_3$  に関する鏡映だから

$$\tilde{C} = \rho_1(\rho_2^3 \rho_0 \rho_1)(1_2)$$



以上のような作用を行うことで、 $\rho_k$  を用いて基本六角形の中心  $C_0$  を  $\mathcal{H}_k^\pm$  に隣接する六角形の中心に移すことができる。

**定理 5.8** (Baez-Egan). [Bae24b] ハニカム  $\{6, 3, 3\}$  の各面の中心全体を  $C$  とすると、 $C$  は  $\text{Her}(2, \mathbb{E})$  の中で行列式が1かつトレースが正である行列と全単射対応する。つまり、

$$C = \text{Her}(2, \mathbb{E}) \cap \mathcal{W} \quad (5.7)$$

が成り立つ。

**証明.**  $C \subset \text{Her}(2, \mathbb{E}) \cap \mathcal{W}$ であることを数学的帰納法で示す。

(I) 補題 5.5 より  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  を用いた変換  $\tau_k^\pm$  によって、基本六角形の中心  $C_0$  を、基本六角形に隣接する任意六角形の中心  $C_k^\pm$  に移すことができる。

(II) 次に  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  を用いた変換  $\phi_p$  によって、基本六角形の中心  $C_0$  を、ハニカム内の任意の六角形  $\mathcal{H}$  の中心  $C_p$  に移すことができると仮定する。

ここで、 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  は  $C_0$  から作用を繰り返して  $C_p$  へ移した際に経由した六角形の数の最小値とする。そこで  $C_p$  に隣接する六角形  $C_{p+1}$  を考えて、 $C_0$  を  $C_{p+1}$  に移せることを示そう。

まず、 $C_0$  を  $C_p$  に移す変換を

$$\phi_p: C_0 \mapsto \phi_p(C_0) = C_p \quad (5.8)$$

とする。このとき、中心が  $C_p$  の六角形  $\mathcal{H}_p$  と中心が  $C_{p+1}$  の六角形  $\mathcal{H}_{p+1}$  が共有する辺を  $e_p$  として  $e_0 := \phi^{-1}(e_p)$  とおくと、 $e_0$  は基本六角形  $\mathcal{H}_0$  の辺になる。また  $C_{p+1}$  を中心に持つ六角形  $\mathcal{H}_{p+1}$  として、これを  $\phi^{-1}$  で引き戻した六角形  $\mathcal{H}'$  を考えると、 $\mathcal{H}'$  は基本六角形と辺  $e_0$  を共有している。このとき、補題 5.5 より、 $\rho_k$  で生成されるある  $\tau \in \text{GL}(2, \mathbb{E})$  で  $\tau(\mathcal{H}_0) = \mathcal{H}'$  となるものがある。

ここで、 $C_0$  を  $C_{p+1}$  に移す変換  $v$  は、

$$v: C_0 \mapsto v(C_0) = C_{p+1}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\mathcal{H}_{p+1}) &= \mathcal{H}' \\ \tau^{-1}(\mathcal{H}') &= \mathcal{H}_0\end{aligned}$$

より

$$\phi^{-1}(\tau^{-1}(\mathcal{H}_{p+1})) = \mathcal{H}_0$$

すなわち、 $C_{p+1}$  を  $C_0$  に移す変換  $v^{-1}$  は次のように表すことができる。

$$v^{-1}(C_{p+1}) = \phi^{-1}(\tau^{-1}(C_{p+1})) = C_0$$

従って、

$$v(C_0) = \tau(\phi(C_0)) \tag{5.9}$$

補題 5.5 より  $\tau$  は  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \text{GL}(2, \mathbb{E})$  で構成されていて、帰納法の仮定より  $\phi$  も  $\text{GL}(2, \mathbb{E})$  で構成される。  $v$  は  $\tau$  と  $\phi$  の合成写像であるから  $v$  も  $\text{GL}(2, \mathbb{E})$  で構成されて、中心  $C_0$  への作用  $v \in \text{GL}(2, \mathbb{E})$  によって  $C_{p+1}$  を得ることができる。

以上より、 $\text{GL}(2, \mathbb{E})$  の作用が  $\mathcal{W}$  を保ち、ハニカムの全ての中心が  $\text{GL}(2, \mathbb{E})$  の作用で得られている。このことから、ハニカムの各面の中心全体  $C \subset \text{Her}(2, \mathbb{E}) \cap \mathcal{W}$  が分かる。

逆の包含関係  $C \supset \text{Her}(2, \mathbb{E}) \cap \mathcal{W}$  については時間がなく、十分な研究ができなかった。そのため、逆の包含関係については [Bae24b] を参照してほしい。  $\square$

## 5.5 補足：基本6角形に隣接する6角形の中心

変換  $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$  を用いた作用によって基本6角形に隣接する6角形の中心  $C_k^\pm$  が求まるが、定理 5.8 を認めると別の方法で  $C_k^+, C_k^-$  は具体的に求めることができることを補足的に記す。

**定理 5.9.** 基本6角形に隣接する6角形の中心  $C_k^\pm$  は

$$C_k^\pm = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & (-\omega)^k \\ \frac{1}{(-\omega)^{6-k}} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & (-\omega)^k \\ \frac{1}{(-\omega)^{6-k}} & 2 \end{pmatrix} \mid k = 1, \dots, 6 \right\} \tag{5.10}$$

である。

**証明.**  $\mathcal{H}$  に隣接する任意の 6 角形の中心を  $C$  を  $t+z, t-z \in \mathbb{Z}, x+iy \in \mathbb{E}$  を用いて,

$$C = \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \in \text{Her}(2, \mathbb{E})$$

とおく. ただし,  $\text{Tr}(C) = 2t > 0, \det C = 1$  を満たす. ここで,

$$t+z, t-z \in \mathbb{Z} \iff t, z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

また, 双曲空間上の 2 点間の距離は 2 点の計量に関して単調増加で,  $C$  は  $C_0$  自身の次に  $C_0$  との計量が小さくなる  $\langle 1_2, C \rangle_L = 2t > \langle 1_2, 1_2 \rangle_L = 1$

すなわち,  $t \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  が 2 番目に最小になるのは,  $t = \frac{3}{2}$  のとき.

このとき  $z = \pm\frac{1}{2}$  となる. また  $(t, z) = (\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2})$  より,

$$\det A = 1 \implies |x+iy| = 1 \iff x+iy \in \mathbb{E}^\times := \{\pm 1, \pm\omega, \pm(1+\omega)\}$$

これで隣接する六角形の中心がすべて得られた. □

この定理は定理 5.8 (Baez-Egan) で示されている, 双曲空間  $\mathcal{W}$  内で各面の中心がアイゼンシュタイン整数を成分とするエルミート行列であることを用いて得られた結果である. 一方で,  $\text{Her}(2, \mathbb{E})$  内の点に限定して,  $1_2$  と最も近い点を定理 5.9 のように求まったとすると, 中心同士や頂点同士の距離を比較したり, 鏡映を用いることで, 求まった点が隣接する 6 角形の中心であることが, 定理 5.8 を使わずに証明することができる. おそらく Egan はそのような計算によって隣接六角形の頂点などを導出したのではないかと思われる.



## References

- [All00] D. Allcock, “New complex- and quaternion-hyperbolic reflection groups,” *Duke Math. J.*, vol. 103, no. 2, pp. 303–333, 2000.
- [Bae24a] J. Baez, *Line bundles on complex tori (part 5)*, *The n-Category Café*, [https://golem.ph.utexas.edu/category/2024/04/line\\_bundles\\_on\\_complex\\_tori\\_p\\_2.html](https://golem.ph.utexas.edu/category/2024/04/line_bundles_on_complex_tori_p_2.html), 2024.
- [Bae24b] J. C. Baez, “The hexagonal tiling honeycomb,” *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 71, no. 10, pp. 1390–1391, 2024.
- [Cox56] H. S. M. Coxeter, “Regular honeycombs in hyperbolic space,” in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III*, Erven P. Noordhoff N. V., Groningen, 1956, pp. 155–169.
- [Cox73] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Third. Dover Publications, Inc., New York, 1973, pp. xiv+321.
- [Gar66] C. W. L. Garner, “Coordinates for vertices of regular honeycombs in hyperbolic space,” *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, vol. 293, pp. 94–107, 1966.
- [JW99] N. W. Johnson and A. I. Weiss, “Quadratic integers and Coxeter groups,” in 6, vol. 51, Dedicated to H. S. M. Coxeter on the occasion of his 90th birthday, 1999, pp. 1307–1336.
- [MSW19] S. Milea, C. D. Shelley, and M. H. Weissman, “Arithmetic of arithmetic Coxeter groups,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 116, no. 2, pp. 442–449, 2019.
- [平井武 01] 平井武, **線形代数と群の表現 I・II** (すうがくぶっくす 20-21). 朝倉書店, 2001.