

有理型関数としての余接関数の 部分分数分解の一般化

青山学院大学 理工学部 数理サイエンス学科

15A21035 瀬戸愛華 西山研究室

2025年2月17日

目次

1	序論	3
1.1	研究の背景	3
1.2	研究の主結果	3
1.3	本論文の構成	4
1.4	謝辞	4
2	余接関数の部分分数分解	5
3	立方べきへの一般化	7
3.1	余接関数と $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}$	7
3.2	$\cot z$ のテイラー展開	13
3.3	主結果	15
4	k 乗べきへの一般化	16
5	応用	21
6	まとめ	22
6.1	今後の課題	22
6.2	卒研発表会での質問	23

1 序論

1.1 研究の背景

私が本研究をしようと思ったきっかけは、元々複素解析に興味があり、もっと深く勉強したいと思ったからです。神保道夫先生の『複素関数入門』で勉強をしていくと、講義で習わなかった内容があり、知れば知るほど考えることの楽しさを感じました。その中でも特に興味を持ったのが、余接関数の部分分数展開です。[1] の §5.2 には次の式が証明されている。

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

$\pi \cot \pi z$ は $(z^2 - n^2)^{-1}$ の和ですが、これを $(z^3 - n^3)^{-1}$ にして $\pi \cot \pi z$ の部分分数展開と同様の手法を用いれば有理型関数 $f_3(z)$ で、

$$f_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}$$

のような部分分数展開を持つものを見つけることが出来ると思いました。証明が理解できれば $(z^k - n^k)^{-1}$ の和に一般化も出来るのではないかと考えました。

1.2 研究の主結果

$\pi \cot \pi z$ の部分分数分解が

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

となることの証明を参考にして

$$f_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3} \quad \text{や} \quad f_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k}$$

がどのような有理型関数として表されるのかを計算した。右辺は広義絶対一様収束していて有理型関数になることは分かっているが、その具体形を求めるのが目的である。得られた主結果は次のようになる。

定理 1.1. (定理 3.10) $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ を 1 の原始 3 乗根, B_n をベルヌーイ数とする。
(ベルヌーイ数については §3.2 参照) このとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3} &= \frac{\pi}{z^2} \cot(\pi z) + \frac{\pi}{(\omega z)^2} \cot(\pi \omega z) + \frac{\pi}{(\omega^2 z)^2} \cot(\pi \omega^2 z) \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{6m} B_{6m}}{(6m)!} z^{6m} \end{aligned}$$

が成り立つ。

定理 1.2. (定理 4.7) $k \geq 2$ を自然数, B_n はベルヌーイ数とする。また、 $\zeta = e^{\frac{2}{k}\pi i}$ を 1 の原始 k 乗根とする。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} &= \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot(\pi z) + \frac{\pi}{(\zeta z)^{k-1}} \cot(\pi \zeta z) + \cdots + \frac{\pi}{(\zeta^{k-1} z)^{k-1}} \cot(\pi \zeta^{k-1} z) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{km} B_{km}}{(km)!} z^{km} & (k : \text{偶数}) \\ \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{2km} B_{2km}}{(2km)!} z^{2km} & (k : \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。

応用としてゼータ関数の特殊値も次のように得られることが分かった。

定理 1.3. (定理 5.2) k : 偶数, B_n はベルヌーイ数とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = -\frac{(2i\pi)^k B_k}{2k!}$$

が成り立つ。

1.3 本論文の構成

第 2 章では、[1] の方針で $\pi \cot \pi z$ の部分分数展開の証明をする。第 3 章では、部分分数展開が $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}$ となる有理型関数を留数定理や積分の評価を行い、証明をする。第 4 章では、第 3 章をもとにして $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k}$ について考える。第 5 章では、応用として、主結果定理 1.2 を用いてゼータ関数の特殊値を求める。最後に第 6 章では、今後の課題と卒業研究発表会で頂いた質問をまとめた。

1.4 謝辞

1 年間ご指導して下さいました西山先生に感謝申し上げます。授業時にはもちろんのこと、質問に行った際にも丁寧に教えていただいて私自身、この 1 年間でかなり成長することが出来ました。また、中間発表会や卒研発表会の際に質問をして下さった先生方にも感謝申し上げます。最後に、この 4 年間の間に講義を担当して下さった先生方にも心より感謝申し上げます。

2 余接関数の部分分数分解

この章では、[1] の §4.6 と §5.2 を参考にして必要事項をまとめる。

定義 2.1. $f(z)$ が領域 $D \subset \mathbb{C}$ で極を除いて正則であるとき、 $f(z)$ は D で有理型関数であるという。

有理関数の部分分数分解

$$\frac{z}{z^2 - 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-2} \right)$$

と同様に、有理型関数 $\pi \cot \pi z$ も極における主要部を用いて部分分数に分解できるのか？という問題を考えてみる。

$\cot \pi z$ の極が整数全体なので、

$$\boxed{\text{予想}} \quad \pi \cot \pi z \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n} = \cdots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \cdots$$

と分解できそうだが、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ と発散してしまうので $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$ は絶対収束しない。そこで、右辺をまとめ直すと

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

となり、収束する。これが元の関数に収束するかどうかは一般的には分からないが、 $\pi \cot \pi z$ のときは次の定理が成り立つ。

定理 2.2. 次の式が成り立つ。

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

ここで、右辺は $z \notin \mathbb{Z}$ について絶対広義一様収束する。

証明. $z \notin \mathbb{Z}$ を 1 つ固定し、 $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとり、 $R = N + \frac{1}{2}$ とおく。留数定理を利用するために積分路を次のように設定する。図 1 のように 4 点 $\pm R \pm iR$ を頂点とする正方形 C に沿って、

$$f(\zeta) = \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

を積分する。(積分路上に極がこないように $R = N + \frac{1}{2}$ としている)

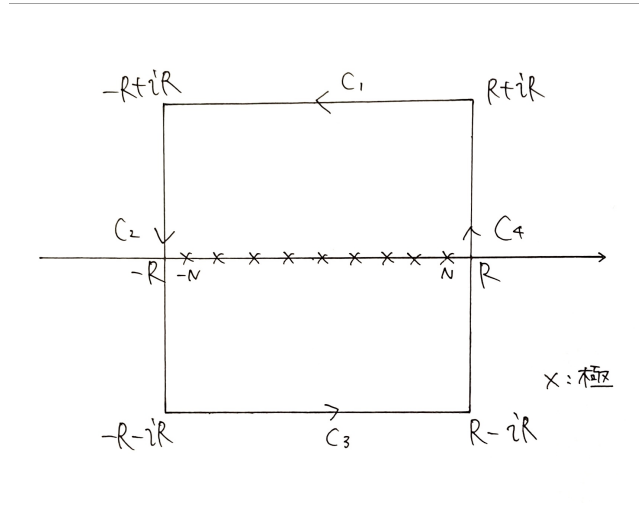


図 1: 積分路

$f(\zeta) = \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z}$ は $\zeta = z$ および $\zeta = k \in \mathbb{Z}$ に極を持ち、そこでの留数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=z} f(\zeta) d\zeta &= \lim_{\zeta \rightarrow z} (\zeta - z) \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} = \pi \cot \pi z \\ \operatorname{Res}_{\zeta=k} f(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{k - z} \end{aligned}$$

となる。よって、正方形内部の留数を集めると、留数定理より

$$\oint_C f(\zeta) \frac{d\zeta}{2\pi i} = \pi \cot \pi z + \sum_{n=-N}^N \frac{1}{k - z} = \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right) \quad (2.1)$$

が得られる。ここで、 $R = N + \frac{1}{2} \rightarrow \infty$ の極限で左辺の積分が 0 になることを積分路上の評価を行い、示していく。

補題 2.3. C 上で $|\cot \pi \zeta| < 2$ が成り立つ。

証明. 積分路 C_1, C_3 での評価: $\zeta = x \pm iR$ ($-R \leq x \leq R$) のとき、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |\cot \pi \zeta| &= \left| \frac{\cos \pi \zeta}{\sin \pi \zeta} \right| = \left| \frac{\frac{e^{i\pi\zeta} + e^{-i\pi\zeta}}{2}}{\frac{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}}{2i}} \right| = \left| i \frac{e^{i\pi\zeta} + e^{-i\pi\zeta}}{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}} \right| \\ &= \left| i \frac{e^{\pi(x \mp iR)} + e^{-\pi(x \mp iR)}}{e^{\pi(x \mp iR)} - e^{-\pi(x \mp iR)}} \right| = \left| \frac{e^{2\pi(x \mp iR)} + 1}{e^{2\pi(x \mp iR)} - 1} \right| < 2 \end{aligned}$$

積分路 C_2, C_4 での評価 : $\zeta = \pm R + iy$ ($-R \leq y \leq R$) のとき、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |\cot \pi \zeta| &= \left| \frac{\cos \pi \zeta}{\sin \pi \zeta} \right| = \left| \frac{\cos (\pm R + iy)}{\sin (\pm R + iy)} \right| \\ &= \left| \frac{\cos (\pm \pi R) \cos (\pi iy) - \sin (\pm \pi R) \sin (\pi iy)}{\sin (\pm \pi R) \cos (\pi iy) + \cos (\pm \pi R) \sin (\pi iy)} \right| \\ &= \left| \frac{\sin (\pm \pi R) \sin (\pi iy)}{\sin (\pm \pi R) \cos (\pi iy)} \right| = \left| \frac{\sin (\pi iy)}{\cos (\pi iy)} \right| = |\tan (\pi iy)| = |\tanh (\pi y)| < 1 \end{aligned}$$

つまり、 C 上で $|\cot \pi \zeta| < 2$ である。 □

(2.1) の左辺を評価するために、補助的に $\frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta}$ を考える。これは積分の評価のための工夫である。この関数は、偶関数で C_1 と C_3 上の積分が打ち消しあい、 C_2 と C_4 上の積分も打ち消しあうので、

$$\int_C \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta} \frac{d\zeta}{2\pi i} = 0 \quad (2.2)$$

が成り立つ。この式 (2.2) を用いると

$$(2.1) \text{ の左辺} = \int_C \pi \cot \pi \zeta \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{2\pi i} = z \int_C \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{2\pi i}$$

と変形することができる。この式を用いて、 $R \rightarrow \infty$ の極限を考えると

$$|(2.1) \text{ の左辺}| \leq 2\pi |z| \int_C \frac{1}{|\zeta| (|\zeta| - |z|)} \frac{|d\zeta|}{2\pi} \leq \frac{8|z|}{R - |z|} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

が得られる。 □

3 立方べきへの一般化

3.1 余接関数と $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3}$

補題 3.1. $z^3 - n^3$ の因数分解は次のようになる。

$$\begin{aligned} z^3 - n^3 &= (z - n)(z - n\omega)(z - n\omega^2) \\ (\omega &= e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad \omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0) \end{aligned}$$

証明. $z^3 - n^3$ の因数分解の手順のみを記す。

1. $z^3 - n^3 = 0$ を n^3 で割る $\rightarrow (\frac{z}{n})^3 - 1 = 0$
2. $\frac{z}{n} = x$ として $x^3 - 1 = 0$ となる x を 3 個見つける $\rightarrow x = 1, \omega, \omega^2$
3. $z = xn$ に直す $\rightarrow z = 1, n\omega, n\omega^2$
4. 因数定理 (定理 3.2) を用いる

□

定理 3.2. (因数定理) $f(z)$ を $z = \alpha$ で正則な関数とする。このとき、次が成り立つ。

$$f(\alpha) = 0 \implies f(z) \text{ は } z - \alpha \text{ で割り切れる。}$$

つまり

$$f(z) \text{ が正則で、 } f(\alpha) = 0 \implies f(z) = (z - \alpha) \times g(z) \quad (g(z) \text{ も正則})$$

となる。

補題 3.3. $\frac{1}{z^3 - n^3}$ の部分分数展開は次のようになる。

$$\frac{1}{z^3 - n^3} = \frac{1}{3n^2} \frac{1}{z - n} + \frac{1}{3n^2\omega^2} \frac{1}{z - n\omega} + \frac{1}{3n^2\omega} \frac{1}{z - n\omega^2}$$

証明. $\frac{1}{z^3 - n^3}$ の部分分数展開を

$$\frac{1}{z^3 - n^3} = \frac{A}{z - n} + \frac{B}{z - n\omega} + \frac{C}{z - n\omega^2}$$

とおく。両辺 $(z^3 - n^3)$ 倍すると

$$1 = A(z - n\omega)(z - n\omega^2) + B(z - n)(z - n\omega^2) + C(z - n)(z - n\omega)$$

となる。

$$z = n \text{ を代入すると } 1 = An^2(1 - \omega)(1 - \omega^2) \quad \therefore A = \frac{1}{3n^2}$$

$$z = n\omega \text{ を代入すると } 1 = Bn^2(\omega - 1)(\omega - \omega^2) \quad \therefore B = \frac{1}{3n^2\omega^2}$$

$$z = n\omega^2 \text{ を代入すると } 1 = Cn^2(\omega^2 - 1)(\omega^2 - \omega) \quad \therefore C = \frac{1}{3n^2\omega}$$

以上より、次の式を得る。

$$\frac{1}{z^3 - n^3} = \frac{1}{3n^2} \frac{1}{z - n} + \frac{1}{3n^2\omega^2} \frac{1}{z - n\omega} + \frac{1}{3n^2\omega} \frac{1}{z - n\omega^2}$$

□

まとめると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n^2 \omega^2} \frac{1}{z - n\omega} + \frac{1}{n^2 \omega} \frac{1}{z - n\omega^2} \right) \quad (3.1)$$

となる。この式の両辺は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ において絶対広義一様収束していることに注意する。

(3.1) の $n \neq 0$ の部分のみを取り出して、各項ごとに考える。

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{z - n}, \quad \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2 \omega^2} \frac{1}{z - n\omega}, \quad \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2 \omega} \frac{1}{z - n\omega^2} \quad (3.2)$$

この関数たちがどのようなものになるのかを調べるために、極における留数が $\frac{1}{n^2}$ になる $g(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z$ を考える。

補題 3.4. $g(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z$ の極は $z = n \notin \mathbb{Z}$ であり、そこでの留数は

1. $n \neq 0$ のとき、 $\operatorname{Res}_{z=n} g(z) = \frac{1}{n^2}$
2. $n = 0$ のとき、 $\operatorname{Res}_{z=0} g(z) = -\frac{\pi^2}{3}$

となる。

証明. まず、 $g(z)$ を次のように変形する。

$$g(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} \quad \text{極: } z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$z = 0$ での留数を求める。

$$g(z) = \frac{\pi}{\pi z^3} \frac{\cos \pi z}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}} = \frac{1}{z^3} \frac{1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^4}{4!} - \frac{(\pi z)^6}{6!} \dots}{1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} - \frac{(\pi z)^6}{7!} \dots} = \frac{1}{z^3} + a(z)$$

($a(z)$ は $z = 0$ で正則)

とおくと

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{1}{z^3} \left(\frac{\cos \pi z}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}} - 1 \right) = \frac{1}{z^3} \left(\frac{\cos \pi z - \frac{\sin \pi z}{\pi z}}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}} \right) = \frac{\left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) \frac{\pi^2}{z} + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) \pi^4 z + \dots}{1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} - \dots} \\ &= -\frac{\pi^2}{3z} + a_1 z + \dots \end{aligned}$$

となる。 a_1 を求めると

$$a_1 = \pi^4 \left[\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) - \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \right) \left(-\frac{1}{3!} \right) \right] = -\frac{\pi^4}{45}$$

となる。よって

$$a(z) = -\frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4}{45}z - \cdots - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

となる。これより

$$g(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} - \cdots - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

が得られる。

$z = n \neq 0$ のときの留数を求める。 $z = n$ は 1 位の極なので、

$$\operatorname{Res}_{z=n} g(z) dz = \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z$$

となり、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\sin \pi z} \frac{\pi \cos \pi z}{z^2} = \frac{\pi \cos \pi n}{n^2} \lim_{z \rightarrow n} \frac{1}{\pi \cos \pi z} = \frac{\cos \pi n}{n^2} \frac{1}{\cos \pi n} = \frac{1}{n^2}$$

が得られる。 □

定理 2.2 を参考にして、次の補題を証明する。

補題 3.5.

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{z - n} = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z - \frac{1}{z^3} + \frac{\pi}{3z}$$

証明. $g(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z$ において、留数を用いる。定理 2.2 の積分路を利用する。 $z \notin \mathbb{Z}$ を 1 つ固定し、 $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとり、 $R = N + \frac{1}{2}$ とおく。4 点 $\pm R \pm iR$ を頂点とする正方形 C に沿って、

$$G(\zeta) = \frac{\zeta^{-2} \pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

を積分する。(積分路は図 1 を参照)

$G(\zeta) = \frac{\zeta^{-2}\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z}$ は、 $\zeta = z$ および $\zeta = k \in \mathbb{Z}$ に極を持ち、そこでの留数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=z} G(\zeta) d\zeta &= \lim_{\zeta \rightarrow z} (\zeta - z) \frac{\zeta^{-2}\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z = g(z) \\ \operatorname{Res}_{\zeta=k} G(\zeta) d\zeta &= \begin{cases} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k - z} & (k \neq 0) \\ \frac{\pi^2}{3z} & (k = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、正方形内部の留数を集めると、留数定理より

$$\oint_C G(\zeta) \frac{d\zeta}{2\pi i} = g(z) + \frac{\pi^2}{3z} + \sum_{k=-N}^N \frac{1}{k^2} \frac{1}{k - z} \quad (3.3)$$

が得られる。ここで、 $R = N + \frac{1}{2} \rightarrow \infty$ の極限で左辺の積分が 0 になることを積分路上の評価を行い、示していく。

- C_1 での評価 : $\zeta = x + iR$ ($-R \leq x \leq R$) のとき、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |\zeta^{-2} \cot \pi \zeta| &= \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\cos \pi \zeta}{\sin \pi \zeta} \right| = \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\frac{e^{i\pi\zeta} + e^{-i\pi\zeta}}{2}}{\frac{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}}{2i}} \right| = \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{e^{i\pi\zeta} + e^{-i\pi\zeta}}{e^{i\pi\zeta} - e^{-i\pi\zeta}} \right| \\ &= \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{e^{\pi(x+iR)} + e^{-\pi(x+iR)}}{e^{\pi(x+iR)} - e^{-\pi(x+iR)}} \right| = \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{e^{2i\pi(x+iR)} + 1}{e^{2i\pi(x+iR)} - 1} \right| \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\frac{1}{|\zeta|^2} \leq \frac{1}{R^2}$ と $e^{2i\pi(x+iR)} = \frac{e^{2i\pi x}}{e^{2\pi R}} \rightarrow 0$ を用いると (3.4) $< \frac{2}{R^2}$ が分かる。

(3.3) の左辺をこれを利用して C_1 上で評価すると

$$\left| \int_{C_1} \frac{\zeta^{-2}\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} \right| \leq \int_{C_1} \left| \frac{\zeta^{-2}\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} \right| \frac{|d\zeta|}{2\pi} \leq \int_{C_1} \frac{1}{R^2 |\zeta - z|} dx$$

R が十分大きいとき $|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| \geq R - |z| > 0$ なので

$$\frac{1}{R^2(R - |z|)} \int_{C_1} dx \leq \frac{1}{R^2(R - |z|)} 2R = \frac{2}{R(R - |z|)} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

となる。

- C_2 での評価 : $\zeta = -R + iy$ ($-R \leq y \leq R$) のとき、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |\zeta^{-2} \cot \pi \zeta| &= \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\cos \pi \zeta}{\sin \pi \zeta} \right| = \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\cos(-R + iy)}{\sin(-R + iy)} \right| = \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\cos(R - iy)}{\sin(R - iy)} \right| \\ &= \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\cos(\pi R) \cos(\pi iy) + \sin(\pi R) \sin(\pi iy)}{\sin(\pi R) \cos(\pi iy) - \cos(\pi R) \sin(\pi iy)} \right| \end{aligned}$$

$$\cos(\pi R) = \cos \pi(N + \frac{1}{2}) = 0 \text{ より}$$

$$= \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\sin(\pi R) \sin(\pi iy)}{\sin(\pi R) \cos(\pi iy)} \right| = \frac{1}{|\zeta|^2} \left| \frac{\sin(\pi iy)}{\cos(\pi iy)} \right| = \frac{1}{|\zeta|^2} |\tanh(\pi y)| \leq \frac{1}{R^2}$$

(3.3) の左辺を上不等式を利用して C_2 上で評価すると

$$\left| \int_{C_2} \frac{\zeta^{-2} \pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} \right| \leq \int_{C_2} \left| \frac{\zeta^{-2} \pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} \right| \frac{|d\zeta|}{2\pi} \leq \int_{C_2} \frac{1}{2R^2 |\zeta - z|} dx$$

R が十分大きいとき $|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| \geq R - |z| > 0$ なので

$$\frac{1}{2R^2(R - |z|)} \int_{C_2} dx \leq \frac{1}{2R^2(R - |z|)} 2R = \frac{1}{R(R - |z|)} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

となる。

経路 C_3 上の積分は C_1 と C_4 のときは C_2 と同様に計算をすると

$$0 = g(z) + \frac{\pi^2}{3z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k - z}$$

となり

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{z - k} = g(z) + \frac{\pi}{3z}$$

を得る。 $g(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z$ と定理 2.2 より

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{z - k} = g(z) - \frac{1}{z^3} + \frac{\pi}{3z}$$

が得られる。 □

補題 3.5 の $g(z)$ に $\omega z, \omega^2 z$ を代入すると次の補題が得られる。

補題 3.6. $g(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z$ とおくと

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\omega z - n} = \frac{\pi}{(\omega z)^2} \cot(\pi \omega z) - \frac{1}{z^3} + \frac{\pi}{3\omega z}$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\omega^2 z - n} = \frac{\pi}{(\omega^2 z)^2} \cot(\pi \omega^2 z) - \frac{1}{z^3} + \frac{\pi}{3\omega^2 z}$$

以上の結果をまとめると、以下の定理が成り立つ。

定理 3.7. $g(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z$ とすると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3} = \frac{1}{3} (g(z) + g(\omega z) + g(\omega^2 z))$$

となる。

証明. (3.1) と補題 3.5, 3.6 と $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を使うと

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3} &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3} \left(g(z) + \frac{\pi}{3z} + g(\omega z) + \frac{\pi}{3\omega z} - \frac{3}{z^3} + g(\omega^2 z) + \frac{\pi}{3\omega^2 z} \right) \\ &= \frac{1}{3} (g(z) + g(\omega z) + g(\omega^2 z)) \end{aligned}$$

となる。 □

3.2 $\cot z$ のテイラー展開

$g(z) + g(\omega z) + g(\omega^2 z)$ を考えるために、 $\cot \pi z$ のテイラー展開を [2] の §1.4 を参考にして求める。ベルヌーイ数 B_n を $b(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ によって定める。

$$\frac{1}{b(z)} = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

なので

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) = 1$$

が成り立つ。

$$\left(B_0 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \dots\right) \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right) = 1$$

である。計算をすると

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, \dots$$

が得られる。ベルヌーイ数の詳しい性質に関しては [2] の第 1 章を参照してほしい。

補題 3.8. $b(z)$ を変形すると

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}$$

となる。右辺は偶関数である。特に、 $B_{2n+1} = 0$ ($n \geq 1$) が成り立つ。

証明.

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2 e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z e^z + 1}{2 e^z - 1} = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}$$

□

このことを用いると $b(z)$ は

$$\begin{aligned} b(z) &= \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = B_0 + B_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \end{aligned}$$

となる。補題 3.8. の z に $2iz$ を代入すると

$$b(2iz) + iz = iz \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = z \frac{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} = z \frac{\cos z}{\sin z} = z \cot z$$

が成り立つ。

補題 3.9. $\cot z$ のテイラー展開は次のようになる。([2] の命題 1.17 を参照)

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

3.3 主結果

定理 3.10. $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ を 1 の原始 3 乗根, B_n をベルヌーイ数とする。

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3} &= \frac{\pi}{z^2} \cot(\pi z) + \frac{\pi}{(\omega z)^2} \cot(\pi \omega z) + \frac{\pi}{(\omega^2 z)^2} \cot(\pi \omega^2 z) \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{6m} B_{6m}}{(6m)!} z^{6m}\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明. 補題 3.9 を用いると

$$\begin{aligned}g(z) + g(\omega z) + g(\omega^2 z) &= \frac{\pi}{z^2} \cot(\pi z) + \frac{\pi}{(\omega z)^2} \cot(\pi \omega z) + \frac{\pi}{(\omega^2 z)^2} \cot(\pi \omega^2 z) \\ &= \frac{1}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-3} + \frac{1}{\omega^6 z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \omega^{2(2n-3)} \pi^{2n} z^{2n-3} \\ &\quad + \frac{1}{\omega^3 z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \omega^{2n-3} \pi^{2n} z^{2n-3} \\ &= \frac{3}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-3} (1 + \omega^{2n-3} + \omega^{2(2n-3)})\end{aligned}\tag{3.5}$$

となる。次の補題を使う。

補題 3.11. p を整数とすると、 $1 + \omega^p + \omega^{2p} = \begin{cases} 3 & (p \in 3\mathbb{Z}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ が成り立つ。

証明. 1. p が 3 の倍数のとき、 $p = 3m$ とおく。

$$1 + \omega^p + \omega^{2p} = 1 + \omega^{3m} + \omega^{2(3m)} = 1 + 1 + 1 = 3$$

2. p が 3 の倍数でないとき、 $(1 - \omega^p) \neq 0$ をかけると

$$(1 - \omega^p)(1 + \omega^p + \omega^{2p}) = 1 - \omega^{3p} = 1 - 1 = 0$$

となるが、 $\omega^p \neq 1$ だから $1 - \omega^p$ で両辺を割ると $1 + \omega^p + \omega^{2p} = 0$ を得る。

□

式 (3.5) の変形を補題 3.11 を用いて続けると $n = 3m$ のときだけ項が残るので、

$$g(z) + g(\omega z) + g(\omega^2 z) = \frac{3}{z^3} + 3 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{3m} \frac{2^{6m} B_{6m}}{(6m)!} \pi^{6m} z^{3(2m-1)}$$

となる。これをまとめて

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^3 - n^3} &= \frac{1}{3} (g(z) + g(\omega z) + g(\omega^2 z)) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{z^3} + 3 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{3m} \frac{2^{6m} B_{6m}}{(6m)!} \pi^{6m} z^{3(2m-1)} \right) \\
&= \frac{1}{z^3} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{3m} \frac{2^{6m} B_{6m}}{(6m)!} \pi^{6m} z^{3(2m-1)} \\
&= \frac{1}{z^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{6m} B_{6m}}{(6m)!} z^{6m}
\end{aligned}$$

となる。 □

4 k 乗べきへの一般化

次に一般の k に対して部分分数展開が $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k}$ となる有理型関数を考える。

$k = 2$ のときは、定理 2.2 を用いて考えると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \left(\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} \right) = \frac{\pi}{z} \cot \pi z \quad (4.1)$$

となる。 $k \geq 3$ のとき、 $k = 3$ のときと同様に考察する。

補題 4.1. $z^k - n^k$ の因数分解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
z^k - n^k &= (z - n)(z - n\zeta)(z - n\zeta^2) \dots (z - n\zeta^{k-1}) \\
(\zeta &= e^{\frac{2\pi i}{k}}, \quad \zeta^k = 1, \quad \zeta^{k-1} + \dots + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0)
\end{aligned}$$

証明. $z^k - n^k$ の因数分解の手順の方針のみ記す。

1. $z^k - n^k = 0$ を n^k で割る $\rightarrow \left(\frac{z}{n}\right)^k - 1 = 0$
2. $\frac{z}{n} = x$ として $x^k - 1 = 0$ となる x を k 個見つける $\rightarrow x = 1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{k-1}$
3. $z = xn$ に直す $\rightarrow z = 1, n\zeta, n\zeta^2, \dots, n\zeta^{k-1}$
4. 因数定理を用いる

□

補題 4.2. $\frac{1}{z^k - n^k}$ の部分分数分解は次のようになる。

$$\frac{1}{z^k - n^k} = \frac{1}{kn^{k-1}} \frac{1}{z - n} + \frac{1}{kn^{k-1}\zeta^{k-1}} \frac{1}{z - n\zeta} + \cdots + \frac{1}{kn^{k-1}\zeta} \frac{1}{z - n\zeta^{k-1}}$$

まとめると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} = \frac{1}{z^k} + \frac{1}{k} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n^{k-1}\zeta^{k-1}} \frac{1}{z - n\zeta} + \cdots + \frac{1}{n^{k-1}\zeta} \frac{1}{z - n\zeta^{k-1}} \right) \quad (4.2)$$

となる。この式の両辺は、 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ において絶対広義一様収束していることに注意する。

(4.2) の $n \neq 0$ の部分のみを取り出して、各項ごとに考える。

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{z - n}, \quad \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}\zeta^{k-1}} \frac{1}{z - n\zeta}, \quad \cdots, \quad \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}\zeta} \frac{1}{z - n\zeta^{k-1}} \quad (4.3)$$

この関数たちがどのようなものになるかを調べるために、極における留数が $\frac{1}{n^{k-1}}$ になる $h(z) = \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot \pi z$ を考える。

補題 4.3. $h(z) = \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot \pi z$ の極は $z = n \notin \mathbb{Z}$ であり、そこでの留数

1. $n \neq 0$ のとき、 $z = n$ で $\frac{1}{n^{k-1}}$
2. $n = 0$ のとき、 $\begin{cases} 0 & (k : \text{偶数}) \\ c_k & (k : \text{奇数}) \end{cases}$

となる。ここで、 $c_k = (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$ ($k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$) である。

証明. $z = 0$ での留数を求める。定理 3.9 を用いると

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot \pi z = \frac{\pi}{z^{k-1}} \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} (\pi z)^{2n-1} \right) \\ &= \frac{1}{z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-k} \end{aligned}$$

となる。 $2n - k = -1$ を考えると、

① k が偶数のとき、 z^{-1} の係数が 0 になる。

② k が奇数のとき、 c_k となる。 $\left(c_k = (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}, k = 2n + 1, n \in N\right)$

となる。 $z = n \neq 0$ のとき、 $z = n$ は 1 位の極なので

$$\operatorname{Res}_{z=n} f(z) dz = \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot \pi z = \lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{z^{k-1}} \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$$

となり、ロピタルの定理を用いると

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\sin \pi z} \frac{\pi \cos \pi z}{z^{k-1}} = \frac{\pi \cos \pi n}{n^{k-1}} \lim_{z \rightarrow n} \frac{1}{\pi \cos \pi z} = \frac{\cos \pi n}{n^{k-1}} \frac{1}{\cos \pi n} = \frac{1}{n^{k-1}}$$

が得られる。□

補題 4.4. $h(z) = \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot \pi z$ とおくと

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{z - n} = \begin{cases} f(z) - \frac{1}{z^k} & (k : \text{偶数}) \\ f(z) - \frac{1}{z^k} + \frac{c_k}{z} & (k : \text{奇数}) \end{cases}$$

となる。

証明. $k = 3$ のときと同様に証明をすればよい。□

定理 4.5. $h(z) = \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot \pi z$ とおく。 $k \geq 2$ とすると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} = \frac{1}{k} (h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1} z))$$

となる。

証明. $k = 2$ と $k \geq 3$ に場合分けをして考える。 $k = 2$ のときは、証明すべき式の右辺に $k = 2$ を代入すると

$$\frac{1}{2} (h(z) + h(\zeta z)) = \frac{1}{2} (h(z) + h(-z)) = h(z) = \frac{\pi}{z} \cot \pi z$$

となり、(4.1) と一致するので成り立つ。

$k \geq 3$ のときは、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} = \frac{1}{z^k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1}} \frac{1}{z - n\zeta^\ell} \quad \text{として考える。}$$

k : 偶数のとき

$$= \frac{1}{z^k} + \frac{1}{k} \left(h(z) + h(\zeta z) + h(\zeta^{k-1} z) + \cdots + h(\zeta^{k-1} z) - \frac{k}{z^k} \right)$$

k : 奇数のとき

$$= \frac{1}{z^k} + \frac{1}{k} \left(h(z) - \frac{c_k}{z} + h(\zeta z) - \frac{c_k}{\zeta z} + \cdots + h(\zeta^{k-1} z) - \frac{c_k}{\zeta^{k-1} z} - \frac{k}{z^k} \right)$$

どちらにしても

$$= \frac{1}{k} (h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1} z))$$

となる。 □

次に $h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1} z)$ をのテイラー展開を求める。そのために、第 2 章の $\cot z$ のテイラー展開を用いると

$$\begin{aligned} & h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1} z) \\ &= \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot(\pi z) + \frac{\pi}{(\zeta z)^{k-1}} \cot(\pi \zeta z) + \cdots + \frac{\pi}{(\zeta^{k-1} z)^{k-1}} \cot(\pi \zeta^{k-1} z) \\ &= \frac{1}{z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-k} + \frac{1}{\zeta^k z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \zeta^{2n-k} \pi^{2n} z^{2n-k} \\ &+ \cdots + \frac{1}{\zeta^{k(k-1)} z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} (\zeta^{k-1})^{2n-k} \pi^{2n} z^{2n-k} \\ &= \frac{k}{z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-k} (1 + \zeta^{2n-k} + \cdots + (\zeta^{k-1})^{2n-k}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。 $k = 3$ のときと同様に証明をすると次の補題を得る。

補題 4.6. $1 + \zeta^p + \zeta^{2p} + \cdots + \zeta^{(k-1)p} = \begin{cases} k & (p \in k\mathbb{Z}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ が成り立つ。

式 (4.3) の変形を補題 4.6 を用いて続けると

- k が偶数のとき

$$\begin{aligned} h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1}z) &= \frac{k}{z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-k} (1 + \zeta^{2n-k} + \cdots + (\zeta^{k-1})^{2n-k}) \\ &= \frac{k}{z^k} + k \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{km} \frac{B_{km}}{(km)!} \pi^{km} z^{k(m-1)} \quad \left(n = \frac{km}{2} \right) \end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} &= \frac{1}{k} (h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1}z)) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{k}{z^k} + k \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{km} \frac{B_{km}}{(km)!} \pi^{km} z^{k(m-1)} \right) \\ &= \frac{1}{z^k} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{km} \frac{B_{km}}{(km)!} \pi^{km} z^{k(m-1)} \\ &= \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{km} B_{km}}{(km)!} z^{km} \end{aligned}$$

となる。

- k が奇数のとき

$$\begin{aligned} h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1}z) &= \frac{k}{z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n-k} (1 + \zeta^{2n-k} + \cdots + (\zeta^{k-1})^{2n-k}) \\ &= \frac{k}{z^k} + k \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{km} \frac{B_{2km}}{(2km)!} \pi^{2km} z^{k(2m-1)} \quad (n = km) \end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} &= \frac{1}{k} (h(z) + h(\zeta z) + \cdots + h(\zeta^{k-1}z)) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{k}{z^k} + k \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{km} \frac{2^{2km} B_{2km}}{(2km)!} \pi^{2km} z^{k(2m-1)} \right) \\ &= \frac{1}{z^k} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{km} \frac{2^{2km} B_{2km}}{(2km)!} \pi^{2km} z^{k(2m-1)} \\ &= \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{2km} B_{2km}}{(2km)!} z^{2km} \end{aligned}$$

となる。

以上の結果を次の定理でまとめる。

定理 4.7. $k \geq 2$ を自然数, B_n はベルヌーイ数とする。また、 $\zeta = e^{\frac{2}{k}\pi i}$ を 1 の原始 k 乗根とする。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} &= \frac{\pi}{z^{k-1}} \cot(\pi z) \frac{\pi}{(\zeta z)^{k-1}} \cot(\pi \zeta z) + \cdots + \frac{\pi}{(\zeta^{k-1} z)^{k-1}} \cot(\pi \zeta^{k-1} z) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{km} B_{km}}{(km)!} z^{km} & (k : \text{偶数}) \\ \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{2km} B_{2km}}{(2km)!} z^{2km} & (k : \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。

5 応用

定義 5.1. $s > 1$ に対してゼータ関数を次のように定義する。([2] の §5.2 を参照)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

$\zeta(s)$ の s が偶数の特殊値を定理 4.7 を用いて求めてみる。定理 4.7 の k が偶数のときの式を変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{z^k - n^k} + \frac{1}{z^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} &= \frac{1}{z^k} + \frac{1}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{km} B_{km}}{(km)!} z^{km} \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{z^k - n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^k - n^k} &= \frac{1}{z^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2i\pi)^{km} B_{km}}{(km)!} z^{km} \end{aligned}$$

$z = 0$ について考えると

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{-n^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-n^k} &= \frac{(2i\pi)^k B_k}{k!} \\ -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} &= \frac{(2i\pi)^k B_k}{k!} \end{aligned}$$

となる。

定理 5.2. (ゼータ関数の特殊値) k が偶数, B_n をベルヌーイ数としたときに次のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = -\frac{(2i\pi)^k B_k}{2k!}$$

定理 5.3. $k = 2\ell$ ($\ell \geq 1$) のときの $\zeta(k)$ は次のように与えられる。([2] の系 5.2 を参照)

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = -\frac{1}{2} \frac{B_k}{k!} (2i\pi)^k$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \dots$$

具体的に計算をしてみると次のようになる。

- $k = 2$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{(2i\pi)^2 B_2}{2 \times 2!}$ となる。

$$(\text{左辺}) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{右辺}) = -\frac{-4\pi^2}{2 \times 2} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6} \text{ となり、一致する。}$$

- $k = 4$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = -\frac{(2i\pi)^4 B_4}{2 \times 4!}$ となる。

$$(\text{左辺}) = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{右辺}) = -\frac{16\pi^4}{2 \times 24} \times -\frac{1}{30} = \frac{\pi^4}{90} \text{ となり、一致する。}$$

k が奇数のときは、同様に考えても $0 = 0$ という当たり前の式しか得られず、 $\zeta(k)$ の値はこの方法では求められない。

6 まとめ

6.1 今後の課題

- 1 無限和に関しては確認が出来たので、無限積についてもどのような結果になるのか確認する。
- 2 卒研発表会で頂いた質問について確認する。

6.2 卒研発表会での質問

- (関先生) ミッタク・レフラーの定理と関係がある? ([4] の §4.2 を参照)

定理 6.1. (ミッタク・レフラーの定理) Ω を $\mathbb{C}$ の領域、 $f \in M(\Omega)$ を領域 Ω 上の有理型関数とする。 $A \subset \Omega$ を領域 Ω 内に集積点を持たない部分集合とする。さらに、各 $a \in A$ に対して、 $P_a(0) = 0$ を満たす多項式 $P_a(Z) \in \mathbb{C}[Z]$ (つまり定数項が 0 の多項式) が与えられているとする。このとき、以下の 2 条件を満たす Ω 上の有理型関数 $f \in M(\Omega)$ が存在する。

- (1) f の極は A のみである。
- (2) 各 $a \in A$ の近傍では、

$$f(z) = P\left(\frac{1}{z-a}\right) + (\text{正則関数})$$

という表示を持つ。

- (田内先生) $k < 0$ でも成り立つ? - 成り立たない。

参考文献

- [1] 神保道夫 『複素関数入門』 岩波書店 (2011)
- [2] 荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信 『ベルヌーイ数とゼータ関数』 牧野書店 (2011)
- [3] 木村俊房 『関数論』 朝倉書店 (2010)
- [4] 池祐一 https://drive.google.com/file/d/1TfjntT02VWZkNbIAJPVIAjj0Hzo_yjl3/edit