

オイラーの定数 γ とガンマ関数

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科
学籍番号:15114073 庄田 充宏
指導教員 西山 享

2020年2月19日

目次

1	序論	2
1.1	研究の背景	2
1.2	研究の主結果	2
1.3	本論文の構成	3
2	オイラーの定数 γ	3
2.1	オイラーの定数 γ とは?	3
2.2	γ について知られていること	6
2.3	γ の近似値	7
2.4	γ の近似値としての分数	8
2.5	γ を含む公式	9
3	ガンマ関数	9
3.1	ガンマ関数とは?	9
3.2	ガンマ関数の主な性質	10
4	複素変数のガンマ関数	11
4.1	積分による定義	11
4.2	3種類の無限乗積の公式	12
4.3	複素平面での解析接続	14
4.4	γ との関係	15
4.5	$\Gamma'(n)$ の計算	16
4.6	高階微分 $\Gamma^{(n)}(1)$ の計算	17
4.7	$\log \Gamma(z)$ のテイラー展開	18
5	まとめ	19
5.1	研究成果	19
5.2	卒業研究発表会での質問内容	19

1 序論

1.1 研究の背景

セミナーで J. Havil の『オイラーの定数 γ 』 ([1]) という本を読み、オイラーの定数 γ について興味を持ち始めたのが卒業研究のきっかけである。オイラーの定数 γ は私にとっては初めて耳にするものであったが、この定数は、円周率 π 、自然対数 e と肩を並べる程有名なものである。また、長年多くの数学者の間でも研究されており、有理数なのか無理数なのか未だに明らかになっていない。私は、1 からオイラーの定数 γ を勉強していくうちに、近似値やこの定数を含む公式だったり、様々なものと出くわした。その中でも特にオイラーの定数 γ とガンマ関数の関係式の公式に注目し、それを理解しようという試みからガンマ関数についての勉強もし始めた。

ガンマ関数は積分で定義されるもので、それがどうして収束し、どんな性質を持つのかの理解から勉強は始まった。その過程で、複素変数への拡張が可能であること、また既に学んだオイラーの定数 γ とガンマ関数の関係式以外にガンマ関数の微分係数等も γ によって表すことが出来るのを知り、これは私自身の学習意欲を更に奮い立たせたものであった。

1.2 研究の主結果

主結果を述べるために、まずはオイラーの定数 γ とガンマ関数の定義式を紹介する。

定義. 右辺の極限で定義される定数をオイラーの定数と呼ぶ。

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

この定義式の右辺は収束する。また、

定義. $x > 0$ の時、以下のように積分を用いてガンマ関数を定義する。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

この積分は $x > 0$ の時に収束する。

このオイラーの定数 γ とガンマ関数の間には、

$$\Gamma'(1) = -\gamma$$

という関係式があり、これ以外にも関係式は存在することを見つけた。以下が、私が見つけた関係式である。

定理. ガンマ関数の正の整数における微分係数は次の式で与えられる

$$\Gamma'(1) = -\gamma \quad \Gamma'(n) = (n-1)! \left\{ -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right\} \quad (n \geq 2)$$

また, ガンマ関数を $x \rightarrow z \in \mathbb{C} (z = x + iy)$ と置き換えると,

定理 ($\log \Gamma(z)$ のテイラー展開).

$$\log \Gamma(z) = (-\gamma)(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} (z-1)^n$$

これらの定理を見て分かるように, オイラーの定数 γ とガンマ関数には密接な関係があることが分かった.

1.3 本論文の構成

§2では, オイラーの定数 γ を紹介する. §1.2で述べた, 収束することの証明や, 近似値, 定義式以外での表し方, γ を含む公式を述べる. §3では, ガンマ関数を紹介する. §1.2で述べた, $x > 0$ で収束することの証明や, ガンマ関数の主な性質を述べる. そして主結果が書かれてる §4では, 複素変数のガンマ関数を紹介する. まずは積分による定義から始まり, 無限乗積を用いたガンマ関数の3種類の公式, そしてそれが全複素平面で定義可能なことを述べる. 更にその後では, オイラーの定数 γ との関係, $\Gamma'(n)$, 高階微分 $\Gamma^{(n)}(1)$ の計算, $\log \Gamma(z)$ のテイラー展開, 収束半径を述べ, 最後, §5でまとめに入るという構成である.

2 オイラーの定数 γ

この定数は, 円周率 π , 自然対数 e と肩を並べる程有名なものであり, オイラーが熱心に研究した分野である. この章では, オイラーの定数 γ の定義式, 近似値, 定義式以外での表し方, γ を含む公式を述べたいと思う.

2.1 オイラーの定数 γ とは?

定義 1. 右辺の極限で定義される定数をオイラーの定数と呼ぶ.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \quad (1)$$

右辺は収束するが、それはこの後に示すこととする。

以下 γ と書くと、本論文ではオイラーの定数を表すことにする。

式 (1) の右辺が収束することの証明は後回しにして、まず次の定理を示す。

定理 2. 式 (1) は、一般に、任意の $\alpha > -1$ に対して、

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n + \alpha) \right)$$

が成り立つ。 $\alpha = 0$ の時が定義式 (1) である。

(証明). 式 (1) の右辺を変形して、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n + \alpha) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n + \log(n + \alpha) + \log n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n - \log \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) \end{aligned}$$

だが、第二項の極限は 0 なので、これは γ に一致する。

$$\therefore \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n + \alpha) \right)$$

□

また、収束性を示すには以下の定理を用いる。これらの定理は、杉浦光夫、『解析入門 I』より抜粋

定理 3 (実数の連続性の公理 [3, p.7]). 実数からなる上に有界かつ単調増加する数列は収束する。

定理 4 (積分の平均値の定理 [3, p.93]). 連続関数 $f(x)$ に対し、以下の式を満たす $\xi \in (a, b)$ が存在する。

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$$

(証明). まず、 $f(x) = \log x$, $a = \frac{1}{n+1}$, $b = \frac{1}{n}$ とおいて、定理 4 を用いる。すると、 $\xi = c_n$ が存在して、

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \log x dx = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \log c_n = \frac{1}{n(n+1)} \log c_n \quad \left(\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n} \right) \quad (2)$$

が成り立つ。一方、 $\log x$ の原始関数は $x \log x - x$ であるから、

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \log x dx = \left[x \log x - x \right]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n+1)} \left(\log \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}e} \right) \quad (3)$$

式(2), (3) より、

$$\frac{(n+1)^n/n^{n+1}}{c_n} = e \quad (4)$$

式(4) より、正の整数 n に対して、以下のことが言える。

$$e = \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{1}{nc_n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \frac{1}{nc_n}$$

また、

$$\frac{1}{n+1} < c_n < \frac{1}{n} \iff n < \frac{1}{c_n} < n+1 \quad \therefore 1 < \frac{1}{nc_n} < 1 + \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{nc_n} = a_n$ とおくと、

$$e = a_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \left(1 < a_n < 1 + \frac{1}{n} \right)$$

ここで、便宜上 n を r と書き直す。

$$e = a_r \left(1 + \frac{1}{r} \right)^r \quad (5)$$

式(5) の両辺の対数をとる。

$$1 = \log a_r \left(1 + \frac{1}{r} \right)^r = \log a_r + r \log \left(\frac{r+1}{r} \right)$$

$$\therefore \text{両辺を } r \text{ で割って } \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \log a_r + \log \left(\frac{r+1}{r} \right) \quad (6)$$

式(6) の両辺で $r = 1$ から n までの和をとると、

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \log a_r + \sum_{r=1}^n (\log(r+1) - \log r) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \log a_r + \log(n+1) \\ \therefore \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} - \log(n+1) &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \log a_r \end{aligned} \quad (7)$$

となる。式(7) の左辺の極限は、 γ の定義式なので、式(7) の右辺が収束することを示せばよい。

ここで、定理3を使う。

$1 < a_r < 1 + \frac{1}{r}$ より、 $\log a_r > 0$ であるから、(7)の右辺は n の関数として増加する。そこで、右辺が上に有界であることを示す。

$1 < a_r < 1 + \frac{1}{r}$ の対数をとって $\frac{1}{r}$ を掛け、1 から n までの和をとると、

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \log a_r < \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \log \left(1 + \frac{1}{r} \right) \quad (8)$$

$x > 0$ に対して、 $\log(1+x) < x$ なので、 $x = \frac{1}{r}$ とおくと、 $\log \left(1 + \frac{1}{r} \right) < \frac{1}{r}$ が成り立つ。

$$\therefore \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \log \left(1 + \frac{1}{r} \right) < \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} \quad (9)$$

最右辺の式を積分を用いて上から評価する。

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} - \log(n+1) < \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^2} < 2$$

よって、 $\sum_{r=1}^n \frac{1}{r} - \log(n+1)$ は単調増加するだけでなく、上に有界であるから、極限をとれば収束し、 γ は矛盾なく定義されていることが分かった。□

2.2 γ について知られていること

オイラーの定数 γ について知られていることを箇条書きでいくつか紹介したい。

- オイラーが熱心に研究したものである。(論文 [2] に詳しく記載されている。) その理由は、ゼータ関数 $\zeta(s)$ とベルヌーイ数 B_n とで深い関係があるからである。

ゼータ関数 $\dots \zeta(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^s}$ ($\operatorname{Re} s > 1$ で収束し、 $s \in \mathbb{C}$ に対してで解析接続可能。

全平面で有理型関数になる。)

ベルヌーイ数 $\dots B_0 = 1, B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$ (漸化式)

- γ は、有理数なのか無理数なのか分かっていない。(超越数だと思われている。)

- γ の近似値は $0.5772156649015325\cdots$ である。(オイラーが 1768 年に 16 桁まで計算した.)
- 連分数としての表現の仕方もある。(§2.4 参照)

2.3 γ の近似値

今日、オイラーの定数 γ の近似値は計算機で容易に算出することが出来る。しかし、それらの物が無かった 1768 年当時、オイラーは手計算によって小数点 16 桁まで導いた。今回、オイラーがどのようにして近似値を導いたのかを紹介したいと思う。そのためには「オイラー・マクローリンの総和公式」というものを利用する。

定理 5 (オイラー・マクローリンの総和公式). $f(x)$ を $(2m+1)$ 階連続的微分可能な関数とすると

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1) \right) + R_n(f, m)$$

が成り立つ。但し、 $0 \leq R_n(f, m) \leq \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \int_1^n |f^{(2m+1)}(x)|dx$ は剰余項で、 B_{2k} はベルヌーイ数である。

これを用いて近似値を求めるために、まず $f(x) = \frac{1}{x}$ の導関数を求める。

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \cdots f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

これらの導関数を用いてオイラー・マクローリンの総和公式を $f(x)$ に適用する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \log n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left((-1)^{2k-1} \frac{(2k-1)!}{n^{2k}} - (-1)^{2k-1} (2k-1)! \right) + R_n(f, m) \end{aligned}$$

ここで、 $(2k)! = (2k-1)! \cdot 2k$ より、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k} \left(1 - \frac{1}{n^{2k}} \right) + R_n(f, m) \quad (10)$$

γ の定義式 $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$ に式 (10) を代入すると,

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k} \left(1 - \frac{1}{n^{2k}} \right) + R_n(f, m) - \log n \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k} + R_\infty(f, m) \end{aligned}$$

式 (10) = $\log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^{2k}} \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k} + R_n(f, m) - R_\infty(f, m) + \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k} + R_\infty(f, m) \right)$ より,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^{2k}} \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k} + \left(R_n(f, m) - R_\infty(f, m) \right)$$

となる. この $R_n(f, m)$ と $R_\infty(f, m)$ の誤差項を無視し, $B_2, B_4, B_6, \dots, B_{2n}$ に値を代入すると,

$$\gamma = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{256n^6} + \dots \quad (11)$$

という式が得られる. オイラーは 1768 年, この級数を $\frac{1}{12n^{14}}$ まで用い, $n = 10$ として計算をした結果,

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 2.9289682539682539, \log 10 = 2.302585092994045684$$

となることから, γ を小数点第 16 位まで計算して,

$$\gamma = 0.5772156649015325 \dots$$

という結果を得た.

2.4 γ の近似値としての分数

定義 6 (連分数). 連分数とは次のような式で表される有理数の表示のことである.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}} \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N} - \{0\})$$

この式を簡便に $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ のように表す.

これに基づくと, $\gamma = [0; 1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, 8, 1, \dots]$ となる.

(証明). 近似値を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} \gamma &= 0.577215\dots = 0 + 0.577215\dots = 0 + \frac{1}{1.73245\dots} \\ &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1.36528\dots}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2.73762\dots}}} \end{aligned}$$

というようにして $\gamma = [0; 1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, 8, 1, \dots]$ が得られる. □

2.5 γ を含む公式

γ が含まれる公式は沢山知られている. それらの一部を紹介したいと思う.

公式の一部 Lagarias, "Euler's work and modern developments" (Bull AMS, 2013) より抜粋 [2, p.536, 537, 539]

- $\gamma = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{\log z} \right) dz$
- $\gamma = \frac{1}{2}(\zeta(2) - 1) + \frac{2}{3}(\zeta(3) - 1) + \frac{3}{4}(\zeta(4) - 1) + \dots$
- $\gamma = \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{(2k+1)2^{2k}}$
- $\Gamma'(1) = -\gamma \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$

他にも色々あるが, 私は最後の公式の理解に努めようと考え, 「ガンマ関数」について勉強をした.

3 ガンマ関数

3.1 ガンマ関数とは?

定義 7. $x > 0$ の時, 以下のように積分を用いて定義する.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \tag{12}$$

補題 8. 式 (12) の広義積分は, $x > 0$ の時収束する.

(証明). $t \geq 0$ の時, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \geq \frac{t^n}{n!}$ より, $e^{-t} \leq (n!)t^{-n}$ だから,
 $c > 1$ の時, n を x より大きい正の整数として,

$$\int_0^c t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^c t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt + \int_1^c (n!) t^{x-n-1} dt \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{式 (13) の最右辺} &= \int_0^1 t^{x-1} dt + \int_1^c (n!) t^{x-n-1} dt = \frac{1}{x} + (n!) \frac{1}{x-n} (c^{x-n} - 1) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{n!}{n-x} \left(1 - \frac{1}{c^{n-x}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) の極限 ($c \rightarrow \infty$) をとると $\frac{1}{x} + \frac{n!}{n-x}$ だから, 式 (12) は $x > 0$ の時に収束する. \square

尚, この証明は, 私の高校時代の友人, 小林君から教わったものである.

3.2 ガンマ関数の主な性質

ガンマ関数の主な性質は次の通りである. この他にもあるが, これは §4 で説明する.

1. $x > 0$ の時, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
2. n が正の整数の時, $\Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

1 ~ 3 の性質を以下証明する.

(証明). 1. $x > 0$ の時, 部分積分をして,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \left[t^x (-e^{-t}) \right]_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$$

2. n が正の整数の時, 1 を用いると,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1)$$

ここで,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

と合わせると,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

3.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} s^{-1} e^{-s^2} 2s ds = 2 \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} \quad (\text{Gauss 積分より})$$

□

4 複素変数のガンマ関数

4.1 積分による定義

定義式 (12) で, $x \rightarrow z \in \mathbb{C} (z = x + iy)$ と置き換えると,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (15)$$

となる. この積分は $\operatorname{Re} z > 0$ で絶対収束するので, このようにしてガンマ関数は複素変数に拡張出来る.

(証明). 次の補題を用いて証明する.

補題 9 (オイラーの公式). 指数関数と三角関数の間での以下の関係が成り立つ.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{特に, } |e^z| = e^x$$

この補題を用いると,

$$\begin{aligned} |t^z| &= |e^{(\log t)z}| = |e^{(\log t)x}| |e^{i(\log t)y}| = |e^{(\log t)x}| = t^x \\ \therefore \int_0^{\infty} |t^{z-1} e^{-t}| dt &= \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(\operatorname{Re} z) \end{aligned}$$

よって, 式 (15) の積分は $\operatorname{Re} z > 0$ で絶対収束する. □

実は, このようにして複素変数に拡張されたガンマ関数 $\Gamma(z)$ は $\operatorname{Re} z > 0$ で正則になる. 証明は, 例えば, 高木貞治『解析概論』§68p.249 を参照して欲しい.

4.2 3種類の無限乗積の公式

まず、「無限乗積」の定義を述べたい。

定義 10 (無限乗積 [4, p.73]). a_n を任意の複素数 (定数またはその函数) として,

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m (1 + a_n)$$

で定義される形の極限值または極限の函数を無限乗積という. 但し, 全ての因数 $(1 + a_n)$ は零でないとする.

犬井鉄郎, 石津武彦, 『複素函数論』より抜粋 [4, p.168]

定理 11 (Gauss の公式). 複素変数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $\operatorname{Re} z > 0$ ならば, 下記の無限乗積は絶対収束して $\Gamma(z)$ に一致する.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

(証明). この証明では無限乗積が絶対収束することは認めて用いることにする. 詳しくは, E. アルティン『ガンマ関数入門』§2(p.20) 定理 2.1 を参照して欲しい. 更に, 以下では項別積分 (積分と極限の交換) を認めて用いることにする.

まず, $e^t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ ($t \in \mathbb{R}$) 及び $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ として

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

であったから,

$$\Gamma(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$$

とおくと, $\Gamma(z) = \Gamma(z, \infty)$ である. そこで, $u = \frac{t}{n}$ と変数変換すると,

$$\Gamma(z, n) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du \tag{16}$$

となる. 部分積分を繰り返して,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du &= \left[\frac{1}{z} u^z (1-u) \right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 u^z (1-u)^{n-1} du \\ &= \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du = \cdots = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \end{aligned} \tag{17}$$

より, 式 (16),(17) と合わせて,

$$\Gamma(z, n) = \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

$$\therefore \Gamma(z, \infty) = \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad .$$

□

定理 12 (Euler の公式). 複素変数 $z \in \mathbb{C}$ に対して, $-z \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば, 次の式の右辺は絶対収束し, $\Gamma(z)$ と一致する.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right\} \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots).$$

(証明). まず, $\operatorname{Re} z > 0$ の範囲で考えることとする. Gauss の公式より,

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2^z}{1^z} \cdot \frac{1}{z+1} \cdot \frac{3^z}{2^z} \cdot \frac{2}{z+2} \cdots \frac{n^z}{(n-1)^z} \cdot \frac{n-1}{z+n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{m+1}{m}\right)^z \frac{m}{z+m} \right\} \\ &= \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^{n-1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^z \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} \right\} \\ &= \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right\} \end{aligned}$$

絶対収束については, 犬井鉄郎, 石津武彦『複素函数論』§6.29(p.170) を参照して欲しい. □

定理 13 (Weierstrass の公式). 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して, 次の等式の右辺の無限乗積は絶対収束し, $\frac{1}{\Gamma(z)}$ に一致する.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

(証明). ここでも, 2と同様に $\operatorname{Re} z > 0$ の範囲で考えることとする. Gauss の公式より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n! n^z} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-z} z \frac{z+1}{1} \cdot \frac{z+2}{2} \cdots \frac{z+n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-z \log n} z \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{z(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)} z \prod_{k=1}^n \left\{ \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right\} \\ &= e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\} \end{aligned}$$

絶対収束については, 犬井鉄郎, 石津武彦『複素函数論』§6.29(p.170)を参照して欲しい. \square

これらの証明は, 犬井鉄郎, 石津武彦『複素函数論』[4, p.168]と共に神保道夫『複素関数入門』[5, p.115-117]を参考にした.

4.3 複素平面での解析接続

積分による定義式 (15) において, $\operatorname{Re} z > 0$ の時は絶対収束することを示した. しかし, $\operatorname{Re} z \leq 0$ でもガンマ関数の定義は可能である. ここで, 以下の定理が成り立つ. E.M. Stein, R. Shakarchi, 『複素解析』より抜粋 [6, p.162]

定理 14. $\operatorname{Re} z > 0$ で定義された式 (15) は, \mathbb{C} 上の有理型関数に解析接続され, その特異点は非正整数 $z = 0, -1, \dots$ における 1 位の極のみである. $\Gamma(z)$ の $z = -m$ における留数は, $\frac{(-1)^m}{m!}$ である.

(証明). $m \geq 1$ を整数として各半平面 $\operatorname{Re} z > -m \wedge \Gamma(z)$ が拡張できることを示せば良い. $\operatorname{Re} z > -1$ に対して,

$$F_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

と定義する. $\Gamma(z+1)$ は, $\operatorname{Re} z > -1$ で正則であるから, F_1 はこの半平面で有理型で, 高々 $z = 0$ に 1 位の極をもつ. $\Gamma(1) = 1$ であるから, F_1 は実際に $z = 0$ に 1 位の極をもち, その留数は 1 である. さらに, $\operatorname{Re} z > 0$ ならば, §3.2 の「ガンマ関数の性質」1 の公式により,

$$F_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$$

である. よって, F_1 は $\Gamma(z)$ の半平面 $\operatorname{Re} z > -1$ 上の有理型関数への拡張である.

$\operatorname{Re} z > -m$ に対して, $\operatorname{Re} z > 0$ で $\Gamma(z)$ に一致する有理型関数 $F_m(z)$ を定義することにより, 同様の議論を継続することができる. $m \geq 1$ を整数として, $\operatorname{Re} z > -m$ に対して,

$$F_m(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{(z+m-1)(z+m-2)\cdots z}$$

と定義する. F_m は $\operatorname{Re} z > -m$ で有理型で, $z = 0, -1, -2, \dots, -m+1$ に 1 位の極をもつ. よって, $\Gamma(z)$ は \mathbb{C} 上で定義が可能である.

このようにして定義された $\Gamma(z)$ の $z = -m$ における留数は

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=-m} F_m(z) &= \lim_{z \rightarrow -m} (z+m) F_{m+1}(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -m} (z+m) \frac{\Gamma(z+m+1)}{(z+m)(z+m-1)\cdots z} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\cdots(-m)} \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \end{aligned}$$

□

4.4 γ との関係

前半で紹介した, オイラーの定数 γ とガンマ関数はどのような関係があるかを紹介する.

1. $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}$ (Weierstrass の公式)
2. $\Gamma'(1) = -\gamma = \int_0^{\infty} e^{-t} \log t \, dt$

(証明). 1 は既に §4.2 で示したので, 2 について述べる.

§4.2 で述べた, ガンマ関数の Gauss の無限乗積表示

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n! n^z} \quad (18)$$

の両辺の対数をとると,

$$\begin{aligned} -\log \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log z + \log(z+1) + \cdots + \log(z+n) - z \log n - \log n! \right\} \\ \therefore \log \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ z \log n + \log n! - \log z - \log(z+1) - \cdots - \log(z+n) \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

次に、式(19)の両辺を微分する。但し、項別微分(微分と極限の交換)を認めて用いることにする。

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \cdots - \frac{1}{z+n} \right) \quad (20)$$

式(20)に $z = 1$ を代入すると、

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \left(\log n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{1+n} \right) = -\gamma.$$

ここで、 $\Gamma(1) = 1$ だから、 $\Gamma'(1) = -\gamma$ が成り立つ。 □

4.5 $\Gamma'(n)$ の計算

§4.4より、 $\Gamma'(1) = -\gamma$ は分かった。では、 $\Gamma'(2), \Gamma'(3), \dots, \Gamma'(n)$ はどうなるのかについて考えてみたい。

→ 式(20)において、 $z = n$ の時を考える。(極限を m でとる。)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+m} - \log m \right) \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+m} - \log m - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n-1} \right) \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+m} - \log(n+m) + \log \frac{n+m}{m} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

だが、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+m} - \log(n+m) \right) = \gamma, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \log \frac{n+m}{m} = 0$$

そして、§3.2の「ガンマ関数の性質」2の公式により

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

なので、

$$\Gamma'(n) = (n-1)! \left\{ -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right\} \quad (n \geq 2)$$

となる。

定理 15. ガンマ関数の正の整数における微分係数は次の式で与えられる

$$\Gamma'(1) = -\gamma \quad \Gamma'(n) = (n-1)! \left\{ -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right\} \quad (n \geq 2)$$

4.6 高階微分 $\Gamma^{(n)}(1)$ の計算

$\Gamma'(n)$ は計算出来たので、今度は高階微分 $\Gamma^{(n)}(1)$ の計算について調べてみる。

$$f(z) = \Gamma(z), g(z) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n} - \log n \right)$$

とおくと、式 (20) より $\Gamma'(z) = f(z)g(z)$ となる。

まず、 $n = 2$ の時には、積の微分により

$$\begin{aligned} \Gamma''(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\ &= \Gamma'(z) \cdot \left\{ -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n} - \log n \right) \right\} \\ &\quad + \Gamma(z) \cdot \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(z+n)^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$z = 1$ を式 (21) に代入すると、

$$\begin{aligned} \Gamma''(1) &= \Gamma(1) \cdot \zeta(2) + (-\gamma) \cdot (-\gamma) \\ &= \zeta(2) + \gamma^2 \end{aligned}$$

$n \geq 3$ の時は、「ライプニッツの公式」を用いる。

定理 16 (ライプニッツの公式).

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$n = 3, 4$ の時を計算してみると、次のようになる。

$$\Gamma'''(1) = -2\zeta(3) - 3\gamma\zeta(2) - \gamma^3$$

$$\Gamma''''(1) = 6\zeta(4) + (6 + 2\gamma)\zeta(3) + (3\zeta(2) + 6\gamma^2)\zeta(2) + \gamma^4$$

しかし、微分が増える毎に次第に複雑になっていくため、高階微分 $\Gamma^{(n)}(1)$ の計算はこのままでは私には難しすぎるのが分かった。

4.7 $\log \Gamma(z)$ のテイラー展開

高階の微分係数は $\Gamma^{(n)}(1)$ を計算しようと考えたのは、 $\Gamma(z)$ のテイラー展開を求めようと思ったからである。しかし、それが成功しなかったため、より簡単に表すことの出来る $\log \Gamma(z)$ のテイラー展開について述べる。

まず、§4.1 でも述べたように、 $\Gamma(z)$ は $\operatorname{Re} z > 0$ で正則である。よって、テイラー展開可能である。そこで、まず微分係数を求めよう。

式 (20) より、

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=0}^n \frac{1}{z+l} - \log n \right)$$

だから、

$$\frac{d^k}{dz^k} \log \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^k (k-1)! \sum_{l=0}^n \frac{1}{(z+l)^k}$$

となる。この式に $z=1$ を代入して、

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} \log \Gamma(z) \right|_{z=1} = (-1)^k (k-1)! \zeta(k) \quad (k \geq 2)$$

を得る。さらに一階微分 $\left. \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) \right|_{z=1} = -\gamma$ と合わせて $\log \Gamma(z)$ のテイラー展開を書き下すと、

$$\log \Gamma(z) = (-\gamma)(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} (z-1)^n$$

となる。

定理 17 ($\log \Gamma(z)$ のテイラー展開は以下のようになり、その収束半径は 1 である)。

$$\log \Gamma(z) = (-\gamma)(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} (z-1)^n$$

(証明). テイラー展開は既に計算したので、収束半径を求める。

まず、次の不等式が成り立つ。

$$0 < \zeta(n) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^n} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n} = 1 + \left[\frac{1}{-n+1} x^{-n+1} \right]_1^{\infty} = \frac{n}{n-1}$$

$$\therefore \left| \frac{\zeta(n)}{n} \right| \leq \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} \quad (22)$$

ここで、 $z-1 = w$ とおくと、 $w \geq 0$ の時、式 (22) より、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\zeta(n)}{n} \right| |w|^n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} |w|^n \quad (23)$$

この時、式(23)の右辺の収束半径はコーシーの収束判定法より1である。従って $\log \Gamma(z)$ の収束半径は1以上である。しかし、もし仮に収束半径が1より大きいと仮定すると、 $\log \Gamma(0)$ が存在してしまうので、これはガンマ関数の定義に矛盾する。よって、 $\log \Gamma(z)$ の収束半径は1である。□

5 まとめ

5.1 研究成果

γ を含む公式の理解から始まったが、そこから $\Gamma'(n)$ や $\log \Gamma(z)$ のテイラー展開にも γ が登場しており、オイラーの定数 γ とガンマ関数には密接な関係があることが分かった。

しかし、高階微分 $\Gamma^{(n)}(1)$ の計算や、時間の関係で γ を含む他の公式の理解が出来なかったので、今後の課題としていきたい。また、 γ とベルヌーイ数の新しい関係式も当たってみたいと思う。

5.2 卒業研究発表会での質問内容

- γ の近似値の計算においてズレが生じたと言っていたが、どういった方法によって求めたのか？(松田先生)

→ オイラー・マクローリンの総和公式によって導かれた式(11)において、 $n = 10$ として、 $\frac{1}{256n^6}$ までの項で打ち切って計算をした。しかし、その際、一つ一つの項を計算してから足し算、引き算をしてしまったので、丸め誤差が蓄積して、結果的に0.577までしか一致しなかった。

- $\Gamma'(n)$ を計算する時、どういうところに詰まってしまったのか？(川上先生)

→ 卒業発表会前の段階ではまだ証明は始めておらず、発表後に数学的帰納法で証明をしようと思ったのですが、いざ証明しようとしたら、どうしたらいいか分からなかったなので、別の角度から取り組んで、結果的に $\Gamma'(n)$ を導くことが出来た。

- 発表の後、卒業論文提出までに、したいことは何か？(増田先生)

→ γ を含む他の公式の理解とガンマ関数の主な性質をきちんと証明する。紹介した公式4つのうち、3つは理解出来たが、残りの1つが理解出来なかった。また、証明の方は、収束、微分と極限の交換、積分と極限の交換など本質的な部分の理解がまだ及ばないが、大筋は証明を追うことが出来た。

最後に、本研究に際して一年間、多忙である中、親切かつ熱心に御指導、添削して下さいました西山先生に感謝申し上げます。また卒業研究発表会で質問を通じてアドバイスをし

て下さったり，日頃質問に付き合っ下さった増田先生，川上先生，松田先生，大久保先生にも御礼を申し上げます．そして，一年間共に過ごした西山研究室の皆様，ありがとうございました．

参考文献

- [1] Julian Havil (新妻弘監訳) 『オイラーの定数ガンマ (γ で旅する数学の世界)』 共立出版, 2009.
- [2] Jephrey C. Lagarias, *Euler's work and modern developments*, Bull AMS, 2013.
- [3] 杉浦光夫 『解析入門 I』 東京大学出版会, 1980.
- [4] 犬井鉄郎, 石津武彦 『複素函数論』 東京出版会, 1966.
- [5] 神保道夫 『複素関数入門』 岩波書店, 2003.
- [6] E.M. Stein, R. Shakarchi 『複素解析』 日本評論社, 2009.
- [7] Murry R. Spiegel 『複素解析』 オーム社, 1995.