

リーマンの写像定理と等角写像 ; 具体例と応用

青山学院大学 理工学部 物理数理学科
西山研究室

15112117 山本 義也

平成 28 年 2 月 19 日

目次

1	序	2
2	等角写像とリーマンの写像定理	4
2.1	等角写像の原理	4
2.2	リーマンの写像定理	5
2.3	上半平面 \mathbb{H} と単位円板 \mathbb{D}	6
3	カージオイドと単位円板	7
4	カージオイドの幾何学的特徴付け	10
4.1	回転円の軌跡としてのカージオイド	10
4.2	円群を包絡線とするカージオイドの方程式	12
5	単位円に関する反転	15
5.1	カージオイド \rightarrow 放物線	15
5.2	円群 \rightarrow 直線群	17
6	等角写像の観点による円群と直線群の考察	18
6.1	放物線と接線の関係	19
6.2	定理 6 の証明	19
7	まとめと今後の研究課題	21

1 序

複素平面上の任意の空でない単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ は単位円板と正則同型である, というのが「リーマンの写像定理」の主張 (の一部) である (参考文献 [1] の第 8 章, p. 225) .

本論文では, このリーマンの写像定理を理解するための具体的な例として単位円板, 上半平面, カージオイド内部, 放物線外部の間の正則写像について考える. これらの領域の間の正則写像の具体例としては, 一次分数変換や単位円板に関する反転などが挙げられる. そのためにこのような写像の性質 (正則性, 等角性, 一次分数変換では円円対応など) についても解説する.

また複素平面上の正則関数は「等角写像」となることが知られているので、その性質を応用して上記の領域内の曲線群の交角について考察する。

このようにして等角写像とリーマンの写像定理についての理解を深めることが本研究の目的である。

リーマンの写像定理は、複素平面上の任意の空でない単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ を単位円板へ写す正則同型の「存在」を保証してくれるが、正則同型をどのように構成するかを与えてはくれない。そこで本論文では初めに、単位円板から上半平面、単位円板からカージオイドの内部への正則同型を考え、単位円板、上半平面、カージオイドの内部、放物線の外部といった複素平面上の領域の間の正則同型について考察した。単位円板から上半平面への正則同型は一次分数変換であり、単位円板からカージオイドの内部への正則同型は2次式である。さらにカージオイドの内部から放物線の外部への正則同型は、単位円に関する反転 $g(z) = 1/z$ であり、これは一次分数変換の特殊な形である。

また複素平面上の正則写像は等角写像になる。このことを理解するため、単位円に関する反転 $g(z) = 1/z$ でカージオイドは放物線に、カージオイドを包絡線とする円群は放物線を包絡線とする直線群へ正則写像で写るという定理3, 5を考えた。また $g(z) = 1/z$ は $z \neq 0$ で正則写像なので等角写像になる。これを用いて、円群と直線群の交角について考え、等角写像についての理解を深めた。

本論文の主結果としては、単位円に関する反転 $g(z) = 1/z$ でカージオイドは放物線に正則写像で写るという定理3を証明した。また、カージオイドを包絡線とする円群は放物線を包絡線とする直線群へ正則写像で写るという定理5を一次分数変換の性質である円円対応の定理4などを用い証明した。さらに、放物線を包絡線とする直線群をカージオイドを包絡線とする円群へ帰着させることで、円群の中から直交する2円を決定でき、2円の交点はある決められた円上にあるという定理6を証明した。

以下、各章の内容を簡単に紹介する。§2では等角写像の定義とリーマンの写像定理について述べる。§3から§4では単位円板からカージオイド内部への正則写像、カージオイドの幾何学的特徴付け、そしてこの特徴付けから円群の包絡線という性質を用いてカージオイドの方程式を導いた。§5では単位円に関する反転を用いてカージオイド内部から放物線外部へ写し、円群が直線群に写ることを示した。最後に§6では放物線とカージオイドが $g(z) = 1/z$ によって等角的に写り合うことを用い、カージオイドを包絡線とする円群の中で、直交する2円の組みについて考察

した．2円はカージオイドのカスプを通る直線とカージオイドとの2つの交点によって決定される．最後に § 7 ではまとめを行う．

研究を進めるにあたって，E・M・スタイン/R・シャカルチの『複素解析』[1]，Arseniy V.Akopyan の『Geometry of the Cardioid』[2]，一松信の『複素数と複素数平面』などを参考にした．

2 等角写像とリーマンの写像定理

定義 1. 平面内の2つの領域 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ に対して，全単射かつ可微分な写像 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ が等角写像であるとは Ω_1 内の任意の2曲線 Γ_1, Γ_2 が点 $p \in \Omega_1$ で交わっているとき， Γ_1, Γ_2 の p における交角と像 $\in f(\Omega_1), f(\Omega_2)$ の $f(p)$ における交角が一致しているときに言う．

例えば直交する座標軸を等角写像によって写した場合，その写った先の曲線同士も直交する．今回は複素平面上において考えるが，複素平面上の正則関数は等角写像になることがよく知られている．まずはこの定理を参考文献 [3] の p.71 に沿って証明する．

2.1 等角写像の原理

定理 1. 複素関数 $w = f(z)$ が $z_0 \in \mathbb{C}$ で正則であり

$$\frac{df}{dz}(z_0) \neq 0$$

を満たしているとする．点 z_0 を通る任意の2つの滑らかな曲線 C_1, C_2 をとり， $w = f(z)$ による C_1, C_2 の像を Γ_1, Γ_2 とするならば，点 z_0 における C_1, C_2 の接線のなす角と $f(z_0)$ における Γ_1, Γ_2 の接線のなす角とは等しい．

Proof. 曲線 C_1, C_2 上の点 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ をとる．またその像を $f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$ とする．すると，微分の定義によって以下の式が成り立つ．

$$\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \frac{df}{dz}(z_0) + \varepsilon_1$$

$$\frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0} = \frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} = \frac{df}{dz}(z_0) + \varepsilon_2$$

ここで $z_i \rightarrow z_0$ のとき $\varepsilon_i \rightarrow 0$ である．また以下のように極座標によって表しておく．

$$\begin{cases} z_1 - z_0 = r_1 e^{i\theta_1}, & (1) \\ z_2 - z_0 = r_2 e^{i\theta_2}, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 - w_0 = p_1 e^{i\phi_1}, & (3) \\ w_2 - w_0 = p_2 e^{i\phi_2}. & (4) \end{cases}$$

これを先ほどの式に代入すると，

$$\frac{p_1}{r_1} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \frac{df}{dz}(z_0) + \varepsilon_1,$$

$$\frac{p_2}{r_2} e^{i(\phi_2 - \theta_2)} = \frac{df}{dz}(z_0) + \varepsilon_2.$$

$z_1, z_2 \rightarrow z_0$ とすると $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ となるので，

$$\frac{p_1}{r_1} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \frac{p_2}{r_2} e^{i(\phi_2 - \theta_2)} \quad (z_1, z_2 \rightarrow z_0)$$

となる．長さ p と偏角 θ はそれぞれ等しくなるので偏角に注目すると，

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (\phi_1 - \theta_1) = \lim_{z \rightarrow z_0} (\phi_2 - \theta_2). \quad (5)$$

(5) の値を α とすると C_1, C_2 の接線はそれぞれ α だけ動き， Γ_1, Γ_2 の $f(z_0)$ における接線に写ったことが言える．よって

よって点 z_0 における C_1, C_2 の接線のなす角と $f(z_0)$ における Γ_1, Γ_2 の接線のなす角とは等しいことがわかる． \square

このことから複素平面上の正則関数で $\frac{df}{dz}(z_0) \neq 0$ となるものは等角写像であることが証明された．

2.2 リーマンの写像定理

Ω は複素平面上の開集合とする．また単位円板は $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と書く（今後 \mathbb{D} は単位円板を表すこととする）．複素平面上の開集合には複素平面全体の \mathbb{C} と $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ がある．今回はその中でも $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ について述べる．そうするとリーマンの写像定理により $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ で，等角写像 $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ の存在が保証される．

定理 2. $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ は空でない単連結領域とする．任意の $z_0 \in \Omega$ に対して，正則写像 $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ で

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) > 0$$

となるものがただ一つ存在する．

証明は参考文献 [1] の第 8 章，p. 230 を参照してほしい．

2.3 上半平面 \mathbb{H} と単位円板 \mathbb{D}

複素平面における等角写像の具体例として，上半平面 \mathbb{H} から単位円板 \mathbb{D} への等角写像を考える． \mathbb{H} と \mathbb{D} は以下のように表される．

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}, \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

定理 2 より $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ であって $F(i) = 0$ かつ $F'(i) \neq 0$ となるものが定数倍を除いて唯一存在する．それは一次分数変換

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z} \tag{6}$$

である． $F(i) = 0, F'(i) = \frac{i}{2} \neq 0$ であることに注意する． F の逆写像は

$$G(w) = i \frac{1 - w}{1 + w}$$

である．ここで次の命題を考える．

命題 1. 式 (6) の一次分数変換 F は \mathbb{H} から \mathbb{D} への正則同型写像である．特に等角同値でもある．

Proof. $F(z)$ は $z \in \mathbb{H}$ と $i, -i$ との距離を考えると $|i - z| < |i + z|$ であるから $|F(z)| < 1$ となっている．よって $F(z)$ は \mathbb{H} 上にある任意の z を \mathbb{D} 内に写すことがわかった．次に $G(w)$ の写す先が \mathbb{H} 内に写っているか確

かめるため， $\text{Im}(G(w)) > 0$ を確かめる． $w = u + iv$ とおくと，

$$\begin{aligned} \text{Im}(G(w)) &= \text{Im}\left(i \frac{1-u-iv}{1+u+iv}\right) \\ &= \text{Re}\left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv}\right) \\ &= \text{Re}\left(\frac{(1-u-iv)(1+u-iv)}{(1+u)^2+v^2}\right) \\ &= \text{Re}\left(\frac{1-u^2-v^2-2iv}{(1+u)^2+v^2}\right) \\ &= \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} \end{aligned}$$

と変形できる．ここで $|w| < 1$ なので $u^2 + v^2 < 1$ となり $1 - u^2 - v^2 > 0$ ．
よって

$$\frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} > 0$$

となる．これで $G(w)$ の像は \mathbb{H} 内に含まれていることが示された．また

$$F(G(w)) = \frac{i - i\frac{1-w}{1+w}}{i + i\frac{1-w}{1+w}} = w,$$

$$G(F(z)) = i \frac{1 - \frac{i-z}{i+z}}{1 + \frac{i-z}{i+z}} = z.$$

よって， F の逆写像が G となっていることが示され，式 (6) の一次分数変換 F は \mathbb{H} から \mathbb{D} への正則同型写像であり，等角同値でもある． \square

よって上半平面 \mathbb{H} と単位円板 \mathbb{D} の間の写像については考察できた．次に他の例として単位円板とカージオイドの内部が互いに正則写像で写り合うことを確認してみよう．

3 カージオイドと単位円板

カージオイドの語源はギリシャ語の「心臓」を意味する「kardia」から由来し心臓形と呼ばれ，以下の図 1 のような形の曲線である．ここでカージオイドのカスプとは $r = 1 - \cos$ の場合原点であり，カージオイドの尖点と言われる．この節では単位円板 \mathbb{D} からカージオイドの内部への正

則写像を考える．手始めに単位円からカージオイド（曲線）への写像を考えてみる．図1のカージオイドの極方程式は

$$r = 1 - \cos \theta$$

である（これは後ほど導出する．）よってカージオイドの複素平面での式は，カージオイド上の点を $w = x + iy$ とおくと，

$$x + iy = (1 - \cos \theta) \cos \theta + i(1 - \cos \theta) \sin \theta$$

となる．

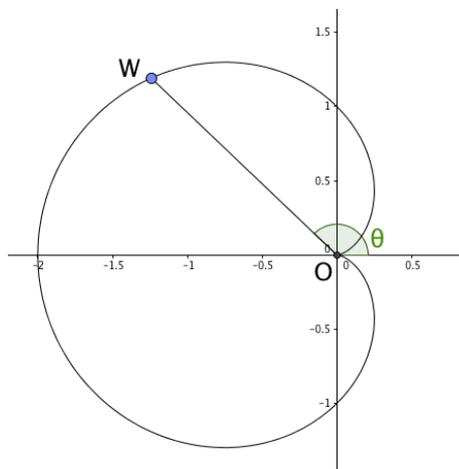


図 1: カージオイド

単位円周上の点を $z = e^{i\theta}$ とおくと，先ほどの式を変形して，

$$\begin{aligned} x + iy &= (1 - \cos \theta) \cos \theta + i(1 - \cos \theta) \sin \theta \\ &= \cos \theta - \cos^2 \theta + i(\sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &= \cos \theta - \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2} \right) + i \sin \theta - i \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sin 2\theta + \cos \theta + i \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} (e^{i2\theta}) + e^{i\theta} - \frac{1}{2} \\ &= z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (z - 1)^2 \end{aligned}$$

と表せる．この変換を $f(z)$ とおくと

$$f(z) = -\frac{1}{2}(z-1)^2 \quad (7)$$

は単位円をカージオイドへ写す正則写像となる．

ここでこの写像が境界だけでなく，単位円板をカージオイドの内部に写していることを証明する．

補題 1. 式 (7) の $f(z)$ は単位円板をカージオイドの内部へ写す正則同型写像である．

Proof. 上の式にある $z-1$ を改めて u とおく．ここから下図のようなカージオイド内部にすっぽりと入る円 $|z-1|=1$ を考える．よって $u = z-1$ は図 2 のように半径 1 中心が $\frac{1}{2}$ の円周上の点となる． u は $re^{i\alpha}$ と表す．

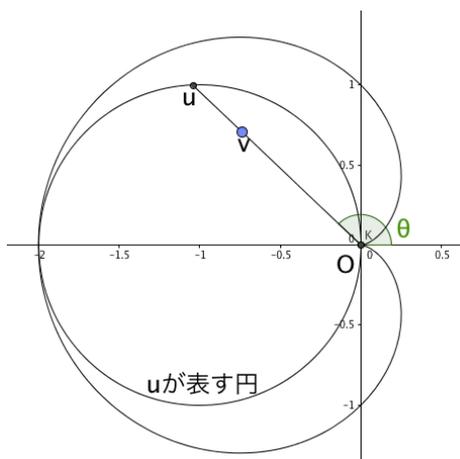


図 2: u と v の位置関係

また円内部の点で u と同一直線上にある点を v とし $be^{i\alpha}$ と表す ($r > b > 0$) ．

この二つの点を最初の等角写像の式 $-\frac{1}{2}(z-1)^2$ に代入すると， $-\frac{1}{2}(re^{i\alpha})^2$ ， $-\frac{1}{2}(be^{i\alpha})^2$ となる．ここでこの二つの点は偏角が等しいので二乗して -2 をかけても同じ直線上にあることがわかる．またこの写った点の大小関係は $r > b$ より

$$\left| \frac{1}{2}(re^{i\alpha})^2 \right| > \left| \frac{1}{2}(be^{i\alpha})^2 \right|$$

となる．以上より u はカージオイドの周上に写り v はカージオイドの内部に写ることがわかり求めた等角写像は単位円板をカージオイドの内部

に写すことが示された．また $-\frac{1}{2}(z-1)^2$ の逆写像は $z = \sqrt{2iw}^{1/2} + 1$ であり $(-1)^{1/2} = i$ となる分枝をとる．これより逆写像の定理を用いて (7) の式 $f(z) - \frac{1}{2}(z-1)^2$ は全単射であることがわかる．よって $f(z)$ は単位円板をカージオイドの内部へ写す正則同型写像であることが示せた．

□

この写像は複素平面上の正則関数なので等角写像である．以下の図 3 は単位円板内の極座標軸（原点から放射状に伸びる直線と，原点を中心とする同心円）を $f(z)$ によってカージオイド内部へ写したものである．これを見ても等角性があることがわかる．

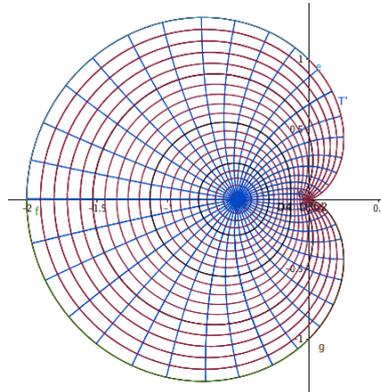


図 3: 単位円板内の極座標を $f(z)$ で写した像

4 カージオイドの幾何学的特徴付け

ここでカージオイドの幾何学的特徴付けを考えたい．これについては参考文献 [2] を参考にした．この特徴付けを元に，カージオイドを包絡線として持つような円群を導入する．曲線群の包絡線の方程式を求める方法はよく知られているので，これを用いてカージオイドの直交座標による方程式を導こう．

4.1 回転円の軌跡としてのカージオイド

まず中心が $-\frac{1}{2}$ ，半径が $\frac{1}{2}$ の円 W を考え，その中心を A （つまり $\frac{1}{2}$ ）とする．また W 上を動く点を P とし， P を通る W の接線を m とする（図 4

参照). この m に関して A と対称な点を A' , さらに m に関して原点と対称な点を B とする. この B の軌跡からカージオイドの極方程式 $r = 1 - \cos \theta$ を導出する.

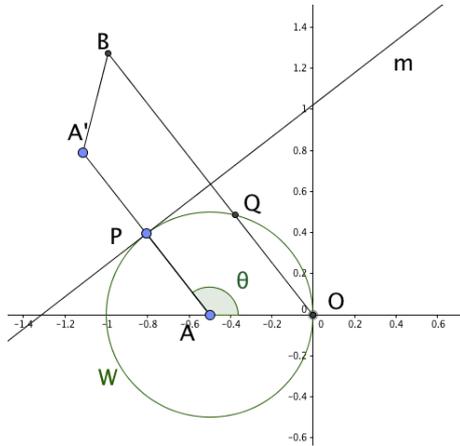


図 4:

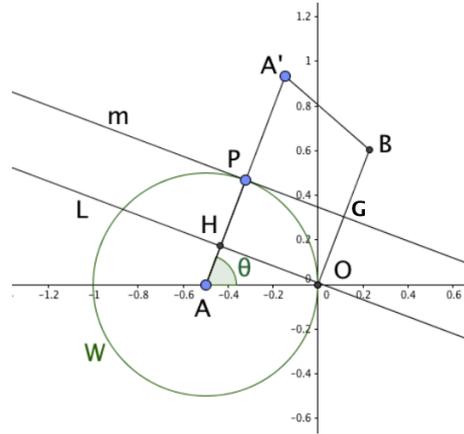


図 5:

まず θ が $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ の場合を考える. 線分 OB と円 W との交点を Q とし, BQ, OQ の長さを考える. O と B, A と A' が直線 m に対して対称なので, 2 組の対角がそれぞれ等しいことが言え, 四角形 $BQOO'$ は平行四辺形となる. よって対辺は等しくなり $BQ = AA' = 1$ となる.

OQ の長さは θ を用いて表すと $-\cos \theta$ となる. よって OB の長さは θ で表すと,

$$OB = OQ + QB = 1 + (-\cos \theta) = 1 - \cos \theta$$

となる.

次に θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の場合を考える (図 5). この場合線分 OB と円 W との交点 Q は表れないので, 線分 OB と m との交点を G, O から線分 AA' に下ろした垂線の足を H とおいて考える. この時 AH の長さは θ を用いると $\frac{1}{2} \cos \theta$ となり OG の長さは $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$ となる.

よって OB の長さは OG の長さの 2 倍となり,

$$OB = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta \right) = 1 - \cos \theta$$

となる.

θ が $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ の場合も同様に示すことができるので、点 B の座標は $OB = 1 - \cos \theta$ を用い、

$$(1 - \cos \theta)e^{i\theta}$$

となり、点 B の軌跡がカージオイドの極方程式 $r = 1 - \cos \theta$ になることが示せた。

ここで点 B は円 W と同じ大きさの円を W の周りに回転したとき、原点を出発した点の軌跡であって、図 6 のようになる。

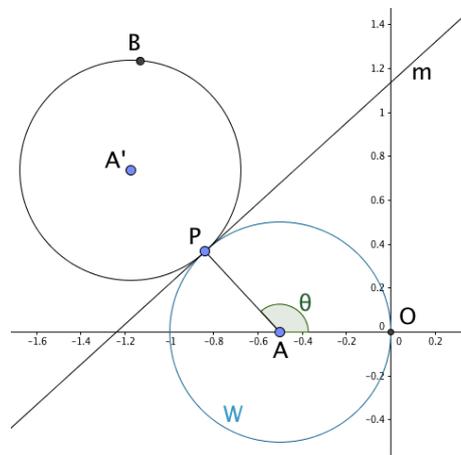


図 6:

4.2 円群を包絡線とするカージオイドの方程式

カージオイドに関する幾何学的考察をさらに進めるため、点 P を中心とし線分 BP を半径とする新たな円を考える (図 7 参照)。

その半径も P に依存することに注意する。半径も変化する。この円の方程式は P の座標を $a \in \mathbb{C}$ とすると、

$$|z - a| = |BP| = |a|$$

と表せ、その点 P を動かすことで円群が得られる (図 8 参照)。図から見て取れるように円群の包絡線はカージオイドになるがそれを示そう。

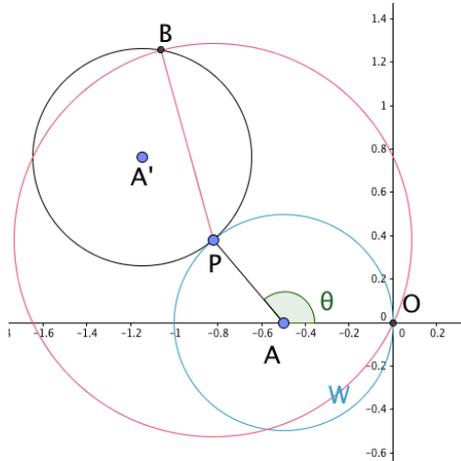


図 7: 半径を BP とする円

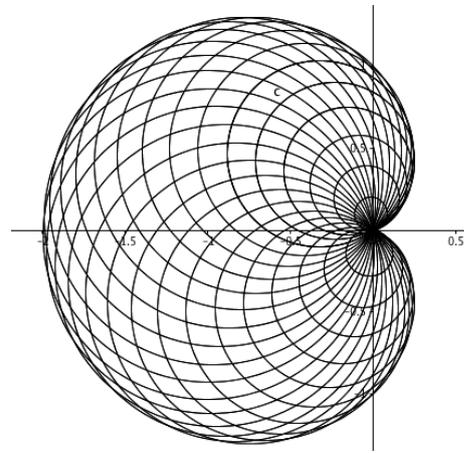


図 8: 円群

命題 2. 円群 $\{C_a : |z - a| = |BP| = |a| \ (a \in W)\}$ の包絡線はカージオイドと一致する .

Proof. $|BP|$ は図 7 の θ を用いると $|\sin \frac{1}{2}\theta|$ と表せる . ここで点 P を表す複素数 a は図 7 の円 W 上にあるので , $a = \frac{1}{2}(e^{i\theta} - 1)$ となり , 変形すると ,

$$\frac{1}{2}(e^{i\theta} - 1) = \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} + i \frac{1}{2} \sin \theta$$

となる . よってこの円は $z = x + iy$ とおくと ,

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - \sin \theta)^2 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta \\ &= x^2 + y^2 + x + \frac{1}{2} - x \cos \theta - y \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta - \sin^2 \frac{1}{2}\theta \\ &= x^2 + y^2 + (1 - \cos \theta)x + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) - y \sin \theta - \sin^2 \frac{1}{2}\theta \\ &= x^2 + y^2 + (1 - \cos \theta)x - y \sin \theta = 0 \\ &\therefore x \cos \theta + y \sin \theta - x^2 - y^2 - x = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

となる . この円を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の間で変化させると円群が得られることになる . この式 (8) を用いて円群の包絡線を参考文献 [4] の方法で求める .

補題 2 ([4], §2.2). 曲線族が 1 変数を含む陰関数 $f(x, y; \theta) = 0$ で与えられる時, この曲線群の包絡線は

$$f(x, y; \theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, y; \theta) = 0$$

の 2 式から θ を消去したものとなる.

この補題を上で調べた円群の方程式 (8) に適応する. 式 (8) を偏微分して,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = x \sin \theta - y \cos \theta = 0 \quad (9)$$

この (8)(9) 式から θ を消去する. 行列を用いて,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + x \\ 0 \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

この式を $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ の式にすると,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$\frac{x^2 + y^2 + x}{x^2 + y^2}$ を H とおくと,

$$\begin{cases} \cos \theta = Hx, & (10) \\ \sin \theta = Hy. & (11) \end{cases}$$

よってこの式を $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入すると,

$$H^2(x^2 + y^2) = 1,$$

これを整理して,

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + x)^2 &= x^2 + y^2, \\ (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2x) - y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

となる. この最後の式 (12) はカージオイド $r = 1 - \cos \theta$ の x, y 座標による方程式である. よって円群の包絡線はカージオイドになることが示された. \square

以下の図は円群の像の包絡線とカージオイドを比べたものである.

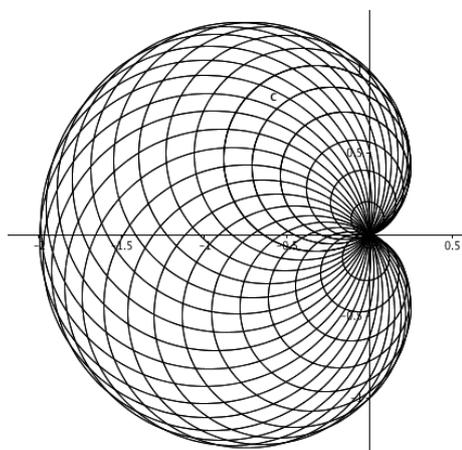


図 9: 円群の包絡線

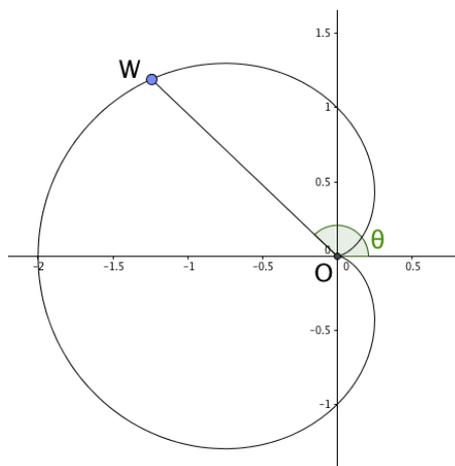


図 10: カージオイド

5 単位円に関する反転

円群の包絡線はカージオイドになることが5.2でわかった。またカージオイドを単位円に関して反転させると放物線になり、円群は直線群に写ることが参考文献 [2] の p.146 よりわかっている。ただ参考文献 [2] は実平面において解析幾何を用いて論じられているので、ここでは複素関数論を用いて考察する。

5.1 カージオイド → 放物線

一次分数変換 $g(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $g(z) = 1/z$ で定義しこれを複素平面上の単位円に関する反転と呼ぶ。単位円に関する反転の定義は $w = 1/\bar{z}$ であるが正則写像を考えるため、 $g(z) = 1/z$ を用いる。

単位円板をカージオイド内部に写す写像 $-\frac{1}{2}(z-1)^2$ と反転を合成すると、

$$v = \frac{-2}{(z-1)^2} \quad (13)$$

となる。この写像で単位円を写すと放物線になることを示す。

定理 3. $z \in \mathbb{C}$ が単位円を動くとき、 v は写像 $v = \frac{-2}{(z-1)^2}$ によって放物線に写る。

Proof. z は単位円上の点なので $z = e^{i\theta}$ と書け, 式 (13) に代入すると,

$$\begin{aligned} v &= \frac{-2}{(z-1)^2} = \frac{-2}{(e^{i\theta}-1)^2} = \frac{-2}{(\cos\theta + i\sin\theta - 1)^2} \\ &= \frac{-2}{\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - 2\cos\theta - 2i\sin\theta + 1} \\ &= \frac{-2}{e^{i2\theta} - 2e^{i\theta} + 1} = \frac{-2e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}} = \frac{-2e^{-i\theta}}{2\cos\theta - 2} \\ &= \frac{e^{-i\theta}}{1 - \cos\theta}. \end{aligned}$$

この式は実軸に関して対称な放物線のパラメータ表示になっているので, 複素共役をとり

$$\frac{e^{i\theta}}{1 - \cos\theta} \quad (14)$$

としても同じ放物線を表す. よってこの (14) 式で放物線の準線や焦点を考えると以下の図 11 のような, $\operatorname{Re}(z) = -1$ を準線とし, 焦点が原点となる放物線であることがわかる. 図 11 の I, D は V から虚軸, 準線に下ろした垂線の足である.

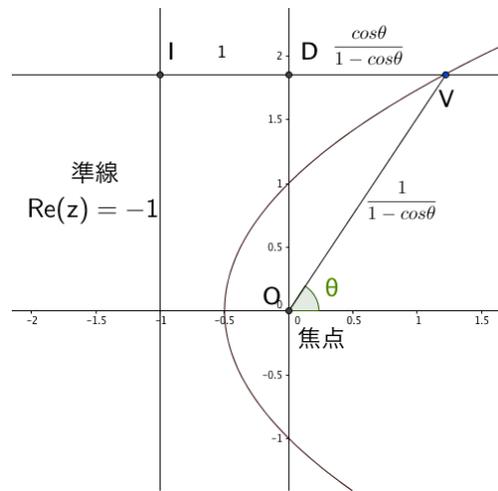


図 11: V の位置関係

□

このことからカーゴイドを単位円に関して反転した像は放物線になることがわかる (図 12 参照). 図 12 よりカーゴイドと放物線は実軸に

に関して対称である．よって反転の定義は $w = 1/\bar{z}$ であるが $g(z) = 1/z$ としても同じになる．

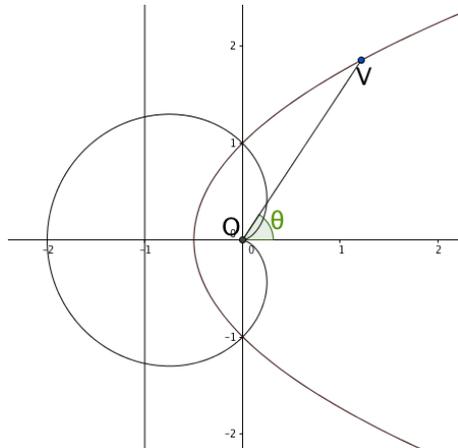


図 12: カージオイドと放物線

5.2 円群 \rightarrow 直線群

以下の議論では一次分数変換の性質を用いるため，まずそれを紹介する．一次分数変換は「円円対応」と呼ばれる性質を持っている．それを正確に述べるためには「広義の円」という用語を用いるのが便利である．ここで「広義の円」とは円または直線のことを指す（参考文献 [3]，第 4 章参照）．

定理 4 (円円対応). 一次分数変換

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

は広義の円 C を広義の円 C' へと写す．また以下の条件で C' が直線になるか，円になるかが決定される．

1. $-b/c \in C$ (極を含む) ならば， C' は直線に写る．
2. $-b/c \notin C$ (極を含まない) ならば， C' は円に写る．

ではこの定理を用いて 4.2 で求めた円群 C_a を反転すると直線群になることを示す．

定理 5. 円群 $\{C_a : |z - a| = |a|\}$ は反転 $g(z) = 1/z$ によって直線群に写る .

Proof. 反転 $g(z) = 1/z$ は一次分数変換である . また反転 $g(z) = 1/z$ の極は原点なので , 円円対応の定理より原点を含む円または直線は直線に写る . 今回考えている θ によって動く点 P を中心とする円群 $|z - a| = |a|$ は全て原点を通る (点 P は図 7 を参照) . よってこの円群は $g(z)$ により全て直線群に写る . 直線群は以下の図 13 の円群から図 14 へと写る . \square

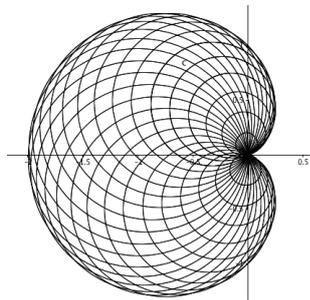


図 13: 円群

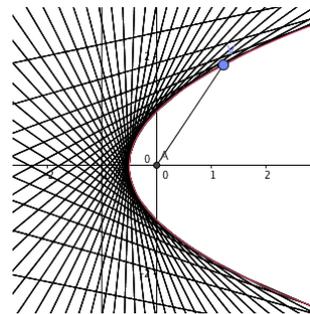


図 14: 直線群

6 等角写像の観点による円群と直線群の考察

反転 $g(z) = 1/z$ が等角写像であることを応用し以下の定理を得る .

定理 6. カージオイドのカスプを通る直線とカージオイドの交点を M', N' とする . 円群 C_a の中でカージオイドと M', N' で接する円を C_1, C_2 とする . このとき C_1, C_2 は円 W 上で交わり , 2 円の W 上の交点における接線 L_1, L_2 は直交する (図 15 参照) . ここで P, P'' は C_1, C_2 の中心 , P' は C_1, C_2 の W 上での交点とする .

この定理は 5.2 で示した直線群を考え , 円群 C_a に帰着させることで簡単に示すことができる . この定理を証明するため , まず放物線と接線の間係を取り上げる .

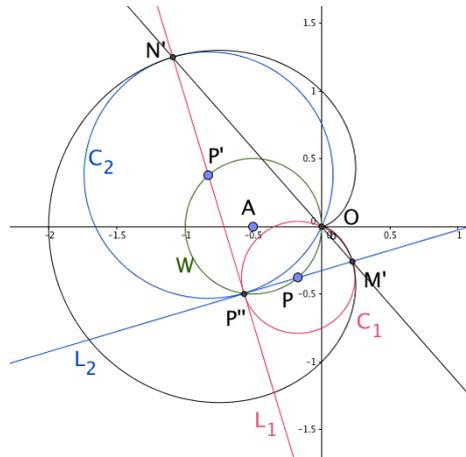


図 15:

6.1 放物線と接線の関係

定理 7. 放物線のある 2 つの接線が直交するとき, 2 接線の交点は準線上で交わる. また直交している 2 接線の放物線との接点を M, N とすると, M, N は焦点を通る直線上にある.

証明は参考文献 [5], 第 4 章を参照して欲しい. この定理を具体的な放物線に用い, 定理 6 を証明する.

6.2 定理 6 の証明

Proof. 今回考えている放物線は準線が $\text{Re}(z) = -1$, 焦点が原点なので, M, N を図示すると以下の図 16 となる.

点 M, N を通る接線をそれぞれ l_1, l_2 とする. l_1, l_2 を単位円に関する反転 $g(z)$ で写すと l_1, l_2 は円円対応の定理により円となる. $g(z)$ は $z \neq 0$ で正則関数となるので, $z \neq 0$ のところで等角写像となる. よって l_1, l_2 の反転によってできた 2 円の交点における接線を L_1, L_2 とすると, L_1, L_2 は等角写像の性質より直交する.

また放物線の準線 $\text{Re}(z) = -1$ は反転 $g(z) = 1/z$ で円 W に写る. よって定理 7 より 2 円は放物線における準線である円 W 上で交わる.

□

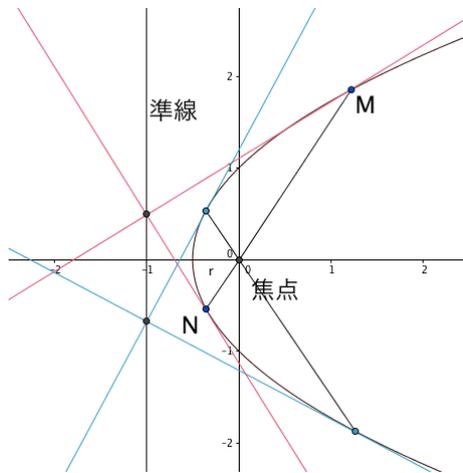


図 16: 直交する接線の具体例

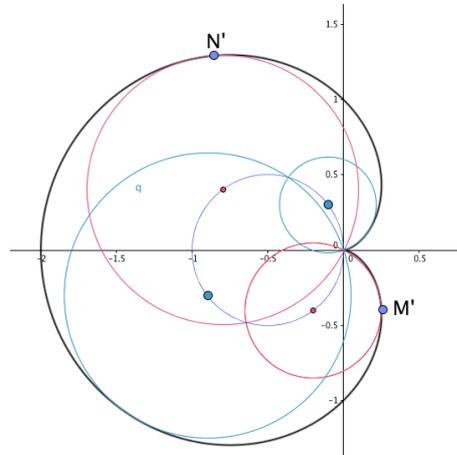


図 17: 2円の具体例

これによりカージオイドのカスプを通る直線とカージオイドの交点で接する2円は円 W で交わり、直交することがわかった。さらに2円の中心 P, P' を円 W で動かすことで接線も動くが、その接線の軌跡は図19のようにカージオイドの半分となることがわかった(図は L_1 の軌跡である)。よって接線 L_1, L_2 を動かすことで現れた直線群の包絡線がカージオイドなのではないかという疑問が新たに出てきた(今回は時間の制約で確かめられていないが、この直線群を再び反転させることで円群と放物線が現れると予想している)。

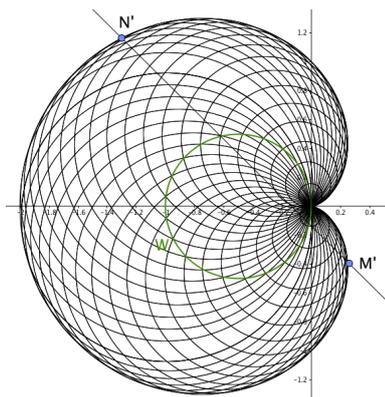


図 18:

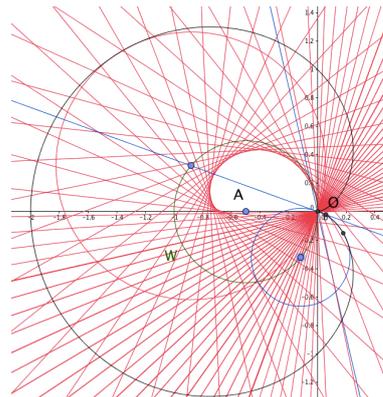


図 19: 接線 L_1 の包絡線

7 まとめと今後の研究課題

本論文のまとめとしては、まず単位円板、上半平面、カージオイドの内部、放物線の外部の間の正則同型がそれぞれの正則同型（一次分数変換や2次式）の合成で写られることを考察した。このことからリーマンの写像定理が保証する、複素平面上の任意の空でない単連結領域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ を単位円板へ写す正則同型の具体例を考察した。

次に、複素平面上の正則写像は等角的に写す正則写像の原理を考えるため、カージオイドの幾何学的特徴付けを考えた。これによってカージオイドを包絡線とする円群とカージオイドの x, y 座標による方程式を求めた。また正則同型の一つである単位円に関する反転 $g(z) = 1/z$ でカージオイドは放物線に、円群は直線群へ正則写像で写る定理 3, 5 を一次分数変換の性質である円円対応の定理 4 などを用い証明した。

さらに、 $g(z) = 1/z$ は正則写像の原理により等角写像になることを用いて、円群と直線群の交角について考え、その結果等角写像の応用として、定理 6 を与え等角写像についての理解を深めた。さらには図 19 から、接線 L_1, L_2 の包絡線がカージオイドなのではないかという新たな発見があった。

よって今後の課題として L_1, L_2 の包絡線として出現するカージオイドを再び反転し、写った像について考察すること、また今回は挑戦したが難しい内容であったためこの論文には書けなかった多角形への正則同型について考えたい。具体的には楕円関数を用いることで上半平面から四角形への正則写像である。これらを今後の研究課題とし、リーマンの写像定理と等角写像についての理解をよりいっそう深めたいと考えている。

最後に、本研究に際して、研究内容や論文の添削など丁寧かつ熱心なご指導を頂き西山亨教授に深謝いたします。ここに感謝の意を表します。大学院に進学した際も何卒ご指導よろしくお願ひいたします。また、日々の輪講を通じて多くの知識や助言を頂いた西山研究室の皆様へ感謝します。

参考文献

- [1] E・M・スタイン/R・シャカルチ(新井仁之他訳)『複素解析』,日本評論社,2009.
- [2] Arsenity V.Akopyan,Geometry of the Cardioid,Amer.Math Monthly,vol122,pp.144-150,MAA,2015.
- [3] 一松信,『複素数と複素数平面』,森北出版株式会社,2010.
- [4] 一松信,『いろいろな幾何1』,岩波書店,1993.
- [5] 納城孝史,『図形と方程式』,科学新興社,1990.