和歌山大学集中講義のためのノート

京都大学総合人間学部 西山 享

Abstract

このノートは和歌山大学教育学部の 1997 年度集中講義のために書かれた。集中講義は田川裕之君の勧めによる。

集中講義の当初の目標は対称群の調和多項式と直交群の調和多項式 (あるいは球面調和関数) の紹介にあったが、時間の都合上対称群の調和関数の紹介までで終わっている。これらの話題のほとんどの部分は [Helgason] に一般的に記述されている。ただしここで行った証明のほとんどはオリジナルであまり [Helgason] とは関係がない。

このノートの前身は今野泰子さんの招きで 1996 年度 (1996/12/9 – 12/12) に行われた大阪府立大学総合科学部での集中講義の際の手書きのノートにある。ただし大阪府大での集中講義はシュアーの相互律 (および $GL \times GL$ の相互律) を示すのが最終目標であったのでこの講義とはかなり内容が異なる。

This version is compiled on November 25, 2000.

Ver.0.1 '97/12/30
Ver.1.0 '98/1/3
Ver.1.1 '98/1/11

Contents

1 群とあそぼう (復習) 3

2 対称群の作用する空間 6
2.1 対称群 . . . 6
2.2 対称群の作用 . . . 7
2.3 対称群の生成元と関係式 . . . 9
2.4 置換行列 . . . 12
2.5 対称群のまとめ . . . 13

3 線型群のお話 15
3.1 一般線型群と基底 . . . 15
3.2 射影空間 . . . 16
3.3 グラム-シュミットの直交化 (= 岩澤分解) . . . 19
3.4 行列の基本変形 (= ブリュウア分解) . . . 20
3.5 行列の対角化 (= カルタン分解) . . . 24
3.6 一般線型群のさまざまな分解のまとめ . . . 26

4 対称式と調和多項式 28
4.1 対称式 . . . 28
4.2 交代式 . . . 33
4.3 調和多項式 . . . 34

5 多項式環上の対称群の表現 **39**
5.1 ポアンカレ級数 39
5.2 有限群の群環と正則表現 41
5.3 対称群の調和多項式の空間上の表現 44
5.4 調和多項式の構造 46

6 直交群と球面調和関数 **48**

7 リーマン対称空間と半単純リー環の軌道 **48**

8 軌道上の調和関数 **48**

1　群とあそぼう (復習)

この章ではウォーミングアップを兼ねて群の定義とその簡単な性質について復習しておきましょう。

群とは感覚的な言葉で言えば対称性あるいは不変性を記述するものとして数学に登場しました。対称性にはいろいろあります。たとえば図形の対称性、方程式の対称性、距離の不変性などなどです。

Example 1.1

- 二面体群：平面上の正多角形を不変にする等長変換全体

  空間群：実ユークリッド空間の運動群の離散部分群 G で $\mathbb{R}^n/G$ がコンパクトなもの。結晶格子を不変にする群。

  点群：空間群 G は $G \simeq K \ltimes T$ と書ける。ここに K は点群 (原点を動かさないもの) で T は平行移動の群である。点群は結局 $GL(n,\mathbb{Z})$ の有限部分群となる (格子を不変にするので)。

- ユークリッド運動群、回転群 $SO(3)$
- $SL(2,\mathbb{Z})$：双曲タイル張りの不変部分群
- ガロア群：部分体の固定部分群

Definition 1.2 集合 G が群であるとは、積 (または和) と呼ばれる二項演算

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \longrightarrow & G \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ (g_1,g_2) & \mapsto & g_1\cdot g_2 \end{array}$$

が存在して次の三つの条件を満たすときに言います。

(1) 積に関して結合性 $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ $(x,y,z\in G)$ が成り立ちます。この性質から幾つかの元の積を考えるとき、どのような順序で計算してもよいので括弧をつける必要がありません。

(2) 単位元 $e\in G$ がただ一つ存在します。(存在すればただ一つ)

(3) 各元 $g\in G$ に対して逆元 $g^{-1}\in G$ がただ一つ存在します。(これも存在すればただ一つ)

群にはたった一つしか演算がありません。これは少し不便なようですが、数学ではよく行われる特殊化 (あるいは単純化、あるいは理想化) というものの一つで

ただ一つの演算を持っていてそれが通常の数の積と似たような性質を持っている、そのようなものを抽象的に考えよう

ということです。このように考えておくとたとえ複雑な代数構造を持つものを考えたとしても、一つ一つの演算には群を研究して得られた成果が適用できます。いろいろと応用が効くわけです。さて群の演算である「積」が通常の数の積と異なっているのはそれが必ずしも可

換でないという点だけです。したがって本稿でも以降は群の積をあたかもそれが数の積であるかのように ($\cdot$ を使わず) $\sigma\tau$ と書くことにしましょう。

代数構造としては群の他に環、体などがあげられますが、上にも書いたように群には演算がたった一つしかないのでとても簡単な対象です。まぁこれはもしかしたら人によって意見が異なるかもしれませんし、あるいは深く学んで行くにつれて自分の意見もだんだん変ってゆくかもしれませんね。

群の例を見てみます。多分皆さんはすでによく知っているものばかりだと思います。

Example 1.3 (1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を加法的な群と見たもの。

(2) $n \times n$ 正則行列の全体 $GL(n,\mathbb{R}), GL(n,\mathbb{C})$ (一般線型群)、その中で行列式が 1 のもの全体 $SL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{C})$ (特殊線型群)。積は普通の行列の積、単位元は単位行列、逆元は逆行列。

(3) 絶対値 1 の複素数全体。(積を通常の複素数の積とする。演習?) あるいはもっと一般に回転群。

(4) 有限アーベル群、あるいはもっと簡単に巡回群

p : 素数、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は加法に関して群になる。これを $\mathbb{Z}_p$ で表す。 p 次巡回群 (これだけならとくに p を素数とする意味はない。)

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ は乗法的に群になる。群法則のうち逆元の存在だけが若干問題。これは $(p,q) = 1 \iff \exists ap + \exists bq = 1$ であることから従う。

$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6$ (有限アーベル群の基本定理)

Exercise 1.4 p が素数のとき $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}_{p-1}$ であることを示してください。 p が素数でなければどうなるでしょうか?

p を素数とします。次の式はほぼ明らかですね。

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

実はもっと一般に次のことが成り立ちます。

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^l \equiv \begin{cases} 0 & (l \not\equiv 0 \pmod{(p-1)}) \\ -1 & (l \equiv 0 \pmod{(p-1)}) \end{cases} \pmod{p} \tag{1.1}$$

これをちょっと証明してみましょう。群の性質を使う丁度いい演習問題になると思います。

まずフェルマーの小定理と通常呼ばれている次の定理を示しましょう。

Theorem 1.5 $a \in \mathbb{Z}, (a,p) = 1$ なら $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ です。

Remark 1.6 最初の仮定を省きたければ $a^p \equiv a \mod p$ と言っても構いません。しかしここではこの仮定にこだわります。(下の証明参照)

PROOF. 一般に群 G において $g^{\#G} = e$ $(g \in G)$ であったことを思い出しましょう。すると $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ が位数 $p-1$ の群であることから定理が従います。 ∎

そこで式 (1.1) を示すには $l \not\equiv 0 \mod (p-1)$ としてもよいでしょう。このときには $\exists a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ s.t. $a^l \not\equiv 1 \mod p$ となるものが存在します。また群 G においては $a \in G$ を掛けるという写像 $m_a : G \ni g \mapsto ag \in G$ が全単射であったことも思い出しましょう。すると

$$\{1, 2, \cdots, k, \cdots, p-1\} \qquad と \qquad \{a1, a2, \cdots, ak, \cdots, a(p-1)\}$$

は同じ集合になります。したがって総和を取ると同じもので

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^l = \sum_{k=1}^{p-1} k^l \equiv \sum_{k=1}^{p-1} (ak)^l = a^l \sum_{k=1}^{p-1} k^l \qquad \mod p$$

したがって

$$(1 - a^l) \sum_{k=0}^{p-1} k^l \equiv 0 \qquad \mod p$$

ここで $a^l \not\equiv 1 \mod p$ ですから、式 (1.1) が成り立ちます。

Exercise 1.7 p が素数のとき $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \equiv -1 \mod p$ であることを証明してください。
[Hint] $1 \leq k < p$ に対して $k^2 \equiv 1 \mod p$ なら $k = 1, p-1$ であることに注意すればよいのではないかと思います。

2　対称群の作用する空間

2.1　対称群

ある集合 X を持ってきます。一般に X から X への全単射の全体を X の対称群と呼んで $\mathfrak{S}_X$ と書きます。

抽象的な集合 X では難しいでしょうから、この章では $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ ととることにしましょう。これは別に数字でなくても n 個の区別できる物体ならかまいません。結果として出てくる対称群は同じものです。しかし双子とか六つ子とかが混じっていると、一人づつが区別できず一体誰が誰だかわからなくなるので、少なくとも各元が区別できる必要があります。そのようなわけで少し無味乾燥ですが、X を冒頭のように数字の集合にとっておきます。実のところ数字のほうが順序とかも自然についているし、演算もできるので何かと扱いやすいのです。

Definition 2.1 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ のとき $\mathfrak{S}_X$ を $\mathfrak{S}_n$ と書いて n 次対称群と呼びます。

$\mathfrak{S}_n$ は次のように捉えることもできます。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を取ると、これは写像ですから各数字を写したものを並べると $\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ という列が一つ決まります。これは重複なしに n 個の数字を並べたものですから $12\cdots n$ の順列になります。逆にこの順列から全単射が決まることは明らかですね。つまり

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \Leftrightarrow & (\{1, 2, \cdots, n\} \text{ の順列全体}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \sigma & \leftrightarrow & \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n) \end{array}$$

です。

このように考えると対称群の元の個数は順列の総数 $n!$ であることがわかりますね。これを記号で $\#\mathfrak{S}_n = n!$ のように表します。つまり $\#A$ は集合 A の元の個数です。

さて順列と考えると元の個数は数えやすいですが、群の構造は見えにくくなります。もともと $\mathfrak{S}_n$ は X 上の全単射の全体なのですから、$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して写像の合成 $\sigma \circ \tau$ を考えることができます。まず τ という写像をやってから次に σ を施すわけです。この写像の合成を積として対称群は確かに群になります。このように群構造を考えるときには全単射の集まりと考えるほうが都合がよろしい。

念のために対称群が本当に群になっていることを確認しておきましょう。

1. 群 G には「積」と呼ばれる演算 xy $(x, y \in G)$ が定義されていました。この演算は結合的です。つまり
$$(xy)z = x(yz)$$
が成り立ちます。対称群の場合は写像の合成を積とすればそれが結合的であることが容易に確かめられます。(一般に写像の合成は結合的)

2. 積に関して単位元と呼ばれる特別な元が存在します。通常これを e とか 1 とか書きます。対称群の場合には e と書くことにしましょう。e は次の性質を持っていました。
$$e \circ \sigma = \sigma \circ e = \sigma$$

このような性質を持つ X から X への全単射はただ一つ存在して恒等写像と呼ばれます。それは順列では $123\cdots n$ に対応します。

3. 群には積に関しての逆演算 (つまり商) があります。つまり各元 σ に対して逆元と呼ばれる元 σ^{-1} が存在して $\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=e$ が成り立ちます。もちろん対称群では σ^{-1} は σ の逆写像に取ればよいですね。

逆に以上の性質を持つものはすべて群と呼ばれたのでした。対称群においては写像の合成は群の積なので (これは非可換ですが) 以降は対称群の積をあたかもそれが数の積であるかのように ($\circ$ を使わず) $\sigma\tau$ と書くことにしましょう。

この節では対称群を

- $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 上の全単射の全体
- 数字 $1,2,\cdots,n$ の順列の全体

という二つの捉えかたをしましたが、他にもいろいろな捉え方があります。次の節では群の作用という言葉に慣れながら別の実現の仕方を考えてみます。

2.2 対称群の作用

対称群はその定義から X 上に自然に作用します。作用というのは日常用語としては使っても、数学用語としてあまり使ったことがないかもしれません。あまり難しく考えないでください。ここでは単に対称群の各元が X 上の変換 (つまり X から X への全単射) になっているということを意味するにすぎません。このようなとき $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ は X に作用する、あるいは働くといいます。

$x\in X$ に対して対称群 $G=\mathfrak{S}_n$ の次のような部分群を考えます。(以下しばしば対象としている中心的な群のことを G と書きます。本章ではもちろん対称群ですが、他の章では違った群になるかもしれませんので要注意。)

$$G_x=\{g\in G\mid g(x)=x\}$$

つまり G_x の元は x を動かさないような元の全体です。これが部分群になることは容易に確かめることができます。G_x は x における固定部分群と呼ばれます。

G の G_x による左側剰余類分解 (あるいは単に左側分解、左コセット分解) を考えましょう。

$$G/G_x=\bigcup_i g_iG_x=\bigcup_i L_i\qquad(L_i=g_iG_x)$$

$\{g_i\}$ は代表元です。このとき各剰余類に属する写像は x を常に一定の元に写します。実際 $L_i\ni g_ih$ $(h\in G_x)$ と書くと $g_ih(x)=g_i(h(x))=g_i(x)$ ですから h に関係なく g_i によってどこに写るかだけで決まります。

Theorem 2.2 $G/G_x\simeq X$ です。この同型は $L_i\mapsto g_i(x)$ によって定まるものです。g_i は L_i の代表元であれば何をとっても構いません。

Proof. $\{g(x) \mid g \in G\} = X$ であることから写像 $G/G_x \ni L_i \mapsto g_i(x) \in X$ が全射になることは明らかです。単射であることは $g_i(x) = g_j(x)$ なら $g_i^{-1}g_j(x) = x$ つまり $g_i^{-1}g_j \in G_x,\ g_j \in g_iG_x = L_i$ なので実は g_i と g_j は同じ剰余類に属しています。つまり $g_i = g_j$ です。 ∎

Corollary 2.3 $\#G = \#G_x \cdot \#X$ です。

対称群の場合には上で見たように $\#G = \#\mathfrak{S}_n = n!$ です。またとくに $x = n$ ととると固定部分群 $G_x = (\mathfrak{S}_n)_n$ は数字 n を動かさないような全単射全体ですから、それは自然に $X_{n-1} = \{1, 2, \cdots, n-1\} \subset X = X_n$ 上の対称群 $\mathfrak{S}_{n-1}$ と同一視できます。つまり

$$G_x = (\mathfrak{S}_n)_n \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$$

以上のことから上の系の等式は対称群の場合には $n! = (n-1)! \cdot n$ という等式として解釈できますね。

次に固定部分群の間の関係も調べておきましょう。X の別の点 y をとるとそれは定理 2.2 によって $y = g(x)$ $(\exists g \in G)$ と表すことができます。このとき次の命題が成り立ちます。

Proposition 2.4 $y = g(x) \in X$ $(g \in G)$ とするとき固定部分群 G_x, G_y は互いに内部自己同型で共役です。

$$G_y = \mathrm{Ad}(g)G_x = gG_xg^{-1}$$

とくに固定部分群はすべて同型になります：$G_y \simeq G_x$.

Proof. これはやってみればすぐにわかります。 ∎

このように X は群 G の作用に関してある種の等質性を持っています。そこで $X = G/G_x$ を G の等質空間と呼びます。

対称群の別の空間への作用を考えてみます。空間として

$$X \text{ の } k \text{ 個の元からなる部分集合の全体}：X(k)\ (0 \leq k \leq n)$$

を考えましょう。X そのものは $X(1)$ と思うことができます。また対称群 $\mathfrak{S}_n$ は明らかに $X(k)$ に推移的に働いています。(次の定義参照)

Definition 2.5 一般に群 G が空間 $\mathcal{X}$ に推移的に働くとは G が $\mathcal{X}$ 上の変換として作用していて、$\forall x, y \in \mathcal{X}$ に対して $g(x) = y$ となるような元 $g \in G$ が存在するときに言います。

Exercise 2.6 対称群が $X(k)$ に推移的に働いていることを確認してください。

上でやったのと同じようにして固定部分群を考えてみることにしましょう。$u = \{1, \cdots, k\} \subset X$ をとると、u の固定部分群 G_u は

$$G_u = \{\sigma \mid \sigma(\{1, \cdots, k\}) = \{1, \cdots, k\}\} = \mathfrak{S}_{\{1,\cdots,k\}} \times \mathfrak{S}_{\{k+1,\cdots,n\}} \simeq \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$$

となります。したがって定理 2.2 によって次の同型がわかります。

$$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k} \simeq X(k)$$

特に個数を数えることによって

$$\#X(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

となることがわかります。これは組合わせ論的に考えれば n 個のものから k 個を取る組み合わせの数と同じもので皆さんよく知っていますね。

すべての k を動かして和を取ると

$$\bigcup_{k=0}^{n} X(k) = 2^X = (X \text{ の部分集合の全体}) \qquad \therefore \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

がわかります。これをもう少し詳しく見れば $(1+t)^n$ の二項展開の式も得られます。

Exercise 2.7 $0 \leq k \leq l \leq n$ に対して $X(k,l)$ を X の二つの部分集合 $A, B \subset X$ の組みで $A \subset B, \#A = k, \#B = l$ となっているものの全体とします。

(1) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ が $X(k,l)$ に推移的に作用していることを確かめてください。

(2) ある一点の固定部分群はどのようになりますか?

(3) $\#X(k,l)$ を求めてください。

2.3 対称群の生成元と関係式

対称群の元は $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ の変換でしたが、これを置換ということもあります。また対称群そのものも置換群と呼ばれることがあります。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は各数字の行き先 (置換された結果) で決まりますが、これを記号で

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように表します。上の段の数字は別に順番に並んでいなくても構わないことにしましょう。

対称群の別の実現の仕方はそれを生成元と関係式で記述することです。

Definition 2.8 群 G の部分集合 $S = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ が生成系であるとは S を含む G の部分群は G しかないときに言います。あるいは次のように言っても構いません。$\forall g \in G$ は $g_i^{\pm 1}$ $(1 \leq i \leq k)$ の (重複を許した) 積で表すことができる。

生成系の各元を生成元と呼びます。

一番つまらない例は G 自身を生成系にとってくることです。しかしこれではまったく面白くもありません。だから普通生成系と呼ぶときにはその個数がかなり小さなものということを意味しているといってもよいでしょう。よく知られている対称群の生成系は次のようなものです。

- $S = \{(1,2), (2,3), \cdots, (n-1,n)\}$: ただしここで (i,j) と書いたのは互換で、i, j を互いに入れ替えて i, j 以外の数字は変えないような置換です。

- $S' = \{(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)\}$
- $S'' = \{(1,2),(1,2,3,\cdots,n)\}$：ただしここで $(1,2,\cdots,n)$ と書いたのは巡回置換で次のような対応によって $\{1,2,\cdots,n\}$ の間の変換を引き起こすものです。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

巡回置換は別に順番に数字が並んでいる必要はありませんし、長さが n より短くても構いません。また互換は長さが 2 の巡回置換です。少し例をあげておきましょう。

$$(2,3,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & \cdots \end{pmatrix}, \qquad (3,2,6,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$$

このうち S' は S の亜流ですが、変っているのは S'' ですね。たった二個の元で対称群の元はすべて書き表すことができるわけです!

Exercise 2.9 (1) すべての置換は共通部分のない巡回置換の積に書けることを示してください。

(2) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma(1,2,\cdots,k)\sigma^{-1} = (\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(k))$ であることを示してください。

(3) $(1,2,\cdots,k) = (1,2)(2,3)\cdots(k-1,k)$ であることを示してください。

Exercise 2.10 上であげた部分集合 S, S', S'' が実際に生成系であることを確かめてください。

このように生成系は与えられますが、これらの生成元は自由であるわけではありません。互いになんの関係も持たない生成系から生成された群を自由群と言いますがこのような群は必然的に無限群になります。対称群は有限群ですから生成元たちは明らかに何らかの関係を持ちます。

このような関係のうちよく知られているものがコクセターの関係式と呼ばれているものでそれは生成元

$$S = \{(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)\}$$

に関する関係式で次のように表されます。$s_i = (i,i+1)$ と書きましょう。

$$\begin{cases} s_i^2 = e \\ (s_i s_{i+1})^3 = e \\ (s_i s_j)^2 = e \qquad (|i-j| \geq 2) \end{cases} \tag{2.1}$$

このうち二番目の関係式は最初の関係式を使うと $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ とも書けます。一般にこのような関係式を組み紐関係式 (braid relation) と呼んでいます。また三番目の関係式は単に $s_i s_j = s_j s_i$、つまり s_i と s_j が可換であることを主張しているにすぎません。

一般に生成系 $S = \{s_i\}$ に対して $s_i^2;\ (s_i s_j)^{m_{ij}} = e$ で (すべての) 関係式が与えられるような群をコクセター群と呼びます。有限コクセター群は幾つかの系列に分かれてはいますがとてもよくわかっていて現代数学においてとても重要な役割をはたしています。

Theorem 2.11 対称群 $\mathfrak{S}_n$ は生成系 $S = \{s_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ と関係式 (2.1) によって生成される有限群です。

PROOF. 以下の証明は少し複雑 (?) なのでとばしてもいいだろう。

まず簡単にわかることは対称群において $s_i = (i, i+1)$ とおくとこれは関係式 (2.1) を満たすということです。そこで上の生成元と関係式によって定義される群を G' とおくと $\mathfrak{S}_n$ は G' の準同型像になります。示したいのはこの準同型が実は同型である、という一点です。これを n に関する帰納法で示すことにします。まず次の補題を示しましょう。

Lemma 2.12 G' の任意の元は

$$\sigma = (s_2, s_3, \cdots, s_{n-1} \text{ の積}) \cdot s_1 s_2 \cdots s_k \qquad (0 \leq k \leq n-1)$$

と表すことができます。

もしこの補題がわかれば $n-1$ に関する事実 $G'_{n-1} \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$ を認めて、G' の位数が $(n-1)! \cdot n = n!$ 以下になることが容易にわかります。ところが G' の準同型像が $\mathfrak{S}_n$ ですから $\#G' = m \cdot n!$ $(m \in \mathbb{N})$ でなければなりません。したがって $m = 1$ で準同型が実は同型であることが結論されます。

以下は補題の証明です。

この補題も帰納法で示しますが、記号の関係上次のように仮定しましょう。 $\{s_2, s_3, \cdots, s_{n-1}\}$ で生成された (コクセター関係式を満たす) 群 G'' の元は表示

$$\sigma = (s_3, s_4, \cdots, s_{n-1} \text{ の積}) \cdot s_2 s_3 \cdots s_k \qquad (1 \leq k \leq n-1) \tag{2.2}$$

を持つ。このような表示を仮に正規化された表示と呼びます。すると

$$\begin{aligned} s_1 \left((s_3, s_4, \cdots, s_{n-1} \text{ の積}) s_2 s_3 \cdots s_k \right) s_1 &= (s_3, s_4, \cdots, s_{n-1} \text{ の積})(s_1 s_2 s_1) s_3 \cdots s_k \\ &= (s_3, s_4, \cdots, s_{n-1} \text{ の積})(s_2 s_1 s_2) s_3 \cdots s_k \\ &= (s_2, s_3, \cdots, s_{n-1} \text{ の積}) s_1 s_2 s_3 \cdots s_k \end{aligned}$$

となることに注意します。$g''_j \in G''$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$ として G' の元は

$$g''_1 s_1 g''_2 s_1 g''_3 s_1 \cdots$$

と書けているわけですが (もちろん g''_j として単位元の場合も許します)、このうち s_1 二つによって挟まれた部分は上の式によって s_1 の数が減らせることがわかります。そのようにして s_1 の数を減らしてゆくと最終的には s_1 の数が一つになる、あるいはまったくなくなってしまうことになります。なくなってしまった場合には問題がありません。

s_1 の数が一つになった場合にはその両側に G'' の元がかかっているわけですが、それを (2.2) 式のように正規化された表示で書きます。g''' で $s_3, s_4, \cdots, s_{n-1}$ の積を表すことにします。

$$g''_1 s_1 g''_2 = g''_1 s_1 (g''' s_2 s_3 \cdots s_k) = (g''_1 g''') s_1 s_2 s_3 \cdots s_k$$

ここで $g''_1 g'''$ は $s_2, \cdots, s_{n-1}$ の積ですからこれは証明すべき形になっています。 ∎

このように生成元と関係式で対称群を捉えることのメリットはなんでしょうか?

たとえば置換の偶奇についてちょっと調べてみましょう。対称群の元 σ は互換の積で必ず表すことができるのでしたが、互換の偶数個の積で表されるときに偶置換、奇数個の積で表されるときに奇置換と呼びます。しかし一見明らかそうなこの定義にも落とし穴があります。つまり互換の積で書けてもその書き方は何通りもあるに違いなく、

その個数が偶数か奇数かなんて表示によって違ってくるかもしれないのです!

そこで次のように考えることにしましょう。まず群準同型 $\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ を与えましょう。この準同型は次のようにすれば構成できます。生成元として $S = \{s_i\}$ をとり、その行く先を $s_i \mapsto -1$ と決めます。このように決めると $\varepsilon_i = \mathrm{sgn}(s_i)$ たちはコクセターの関係式 (2.1) を満たすことがすぐに確認できます。この関係式を満たすということは S 上で定義された sgn が対称群全体に準同型として矛盾なく拡張できることを意味しています。

すべての互換は s_i たちの奇数個の積で表すことができますから (これは証明が必要ですが)、$\mathrm{sgn}(\text{互換}) = -1$ です。したがって上で定義したように σ を互換の積に書いたときその個数の偶奇は書き方によらずに決まることがわかります。

Exercise 2.13 互換が s_i たちの奇数個の積で書けることを確かめてください。いったん一通りにでも書ければその偶奇は常に一定であることは上の議論からわかります。

Exercise 2.14 対称群から $\mathbb{Z}_2$ への準同型は自明なものと sgn とのただ二つしかないことを証明してください。

2.4 置換行列

この節ではさらに別の対称群の実現を見てみましょう。それは置換行列によるものです。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{C}) \\ \Cup & & \Cup \\ \sigma & \mapsto & T_\sigma \end{array}$$

を次のように決めましょう。

$$(T_\sigma)_{ij} = \delta_{i\,\sigma(j)} \qquad \text{または} \qquad T_\sigma = \left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \cdots, e_{\sigma(n)}\right)$$

ただし $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底です。T_σ は各行、各列に一つだけ 1 があり、他の要素はすべてゼロです。このような行列を置換行列と呼びます。その全体を $\mathcal{T}_n$ と書きましょう。置換行列が適当な $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ をとれば T_σ と表されることはほぼ明らかでしょう。

上の対応 $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto T_\sigma \in \mathcal{T}_n$ は群の準同型です。それは次のように確かめられます。

$$T_\sigma T_\tau = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\tau(j)}\right) = \left(\delta_{i,\sigma(\tau(j))}\right) = \left(\delta_{i,(\sigma\tau)(j)}\right) = T_{\sigma\tau}$$

これは明らかに単射です。全射性はすでに注意しましたのでこの対応は同型対応であることがわかります。このようにして対称群の行列群としての実現が与えられました。

このように行列で対称群を実現することは意味のあることです。たとえば行列ですからそのトレースを取ったり、あるいは行列式を計算したりできます。対称群のうちは対称群の元との積しか考えられなかったのですが、置換行列でない他の行列との積を考えることも可能です。また行列群ですから $\mathbb{C}^n$ というベクトル空間にも自然に作用しています。ここでは二つほどそのような例を考えてみることにしましょう。

まずは行列式の話から。

Proposition 2.15 $\det T_\sigma = \pm 1$ です。σ が偶置換のとき $\det T_\sigma = 1$、奇置換のとき $\det T_\sigma = -1$ となります。

PROOF. 群準同型であることから生成元での様子を確かめれば十分です。$S = \{s_i = (i, i+1)\}$ を前節のように取り、 $T_i = T_{s_i}$ と置きましょう。このとき $\det T_i = -1$ であることは容易にわかります。諸君はぜひ行列としての T_i を実際に計算してみてください。さて生成元で決まるとあとはすべての置換に対して自動的に決まってしまいます。しかもこの場合には $\det T_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)$ がわかります。

まぁいずれにせよ前節で対称群から $\mathbb{Z}_2$ への準同型がただ二つしかないことを言いましたのでもしそれが自明でなければ sgn になるしかありません。(これは別証にもなります) ∎

$n \times n$ の対角行列全体を D と書きましょう。

$$D = \{A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_j \in \mathbb{C}\} \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$$

このとき D への対称群の作用を

$$\sigma(A) = \mathrm{Ad}(T_\sigma)A = T_\sigma A T_\sigma^{-1} \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

によって定めます。実際にはこれは次のような作用になります。

$$\sigma(A) = \mathrm{diag}\left(a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, \cdots, a_{\sigma^{-1}(n)}\right)$$

これを確かめるにはやはり生成元と関係式を用いて $s_i = (i, i+1) \in S$ についてだけどうなっているか調べればよく、そのこと自体は簡単な計算です。

つまり対称群は対角行列に座標の入れ替えとして働いています。

2.5 対称群のまとめ

対称群の実現を様々な方法で与えました。

- $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上の変換 (全単射) の全体
- 数字 $1, 2, \cdots, n$ の順列の全体
- 生成元と関係式によって定まる有限群
- 置換行列の全体

このほかにも実現の仕方はたくさん (?) 考えられます。皆さんもどのような方法があるのか少し考えてみてください。

さらに群の作用と対称群が推移的に作用する空間 (等質空間) についても少し考えてみました。このような話題は次章以降の主要なテーマになります。

やり残したこと。

- 数珠への作用、数珠順列。

  配置空間 (吉田さんの本参照)

- 四面体への $\mathfrak{S}_4$ の作用。

  (頂点 $\subset$ 辺 $\subset$ 面 $\subset$ 四面体全体) という旗の全体と $\mathfrak{S}_4$ が対応してしかもそれへの置換表現が正則表現になること。旗自身は頂点に配した数字の順番を指定していると思えば、それは順列となる。

3　線型群のお話

本章では無限群であり、かつ連続群でもある線型群 (あるいは行列群) について解説します。そのほとんどの性質は実は線型代数を学んだときにすでに出てきているのですがここではそれに少し違った光をあててみることにしましょう。

3.1　一般線型群と基底

一般線型群 $GL(n,\mathbb{C})$ は $n\times n$ の正則行列全体のなす群です。要するに $V=\mathbb{C}^n$ からそれ自身への線型写像で可逆なもの (全単射) の全体ですね。あるいは

$$GL(n,\mathbb{C})\ni g=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\qquad (a_i\in V)$$

と行列を n 個の列ベクトルの並びとして書いておくと $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ は V の基底ですから集合としては $GL(n,\mathbb{C})\fallingdotseq(V$ の基底全体) と考えられます。しかしこれは正確には等しくありません。なぜかというと基底は並べ替えでは変わらない (集合として考えますから) のに対して行列のほうは並びの順番が問題だからです。したがって

$$GL(n,\mathbb{C})=(V\text{ の順序つき基底の全体})$$

が正しい式となりますね。これを群の作用と等質空間という視点から見直してみます。

まず V の基底全体の集合を $\mathcal{B}$ と書きましょう。$\mathcal{B}$ には $GL(n,\mathbb{C})$ が自然に作用します。具体的には基底 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\in\mathcal{B}$ に対して $g\in GL(n,\mathbb{C})$ は次の変換を引き起こします。

$$g:\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\longmapsto\{g(a_1),g(a_2),\cdots,g(a_n)\}\in\mathcal{B}$$

この作用は明らかに $\mathcal{B}$ 上推移的です。したがって固定部分群を求めれば $\mathcal{B}$ はその商空間として書ける事になります。まず V の一つの基底 (なんでもよい) を取りましょう。何でもよいわけですから一番便利そうなものを取ってくればよろしい。遠慮はありません。ここでは一番便利そうなものとして標準基底

$$u=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\subset V$$

をとりましょう。u の固定部分群 G_u はなんでしょうか? そうですね、標準基底の入れ替えとして働く行列たち、置換行列の全体 $\mathcal{T}_n\simeq\mathfrak{S}_n$ です。したがって

$$GL(n,\mathbb{C})/\mathcal{T}_n\simeq\mathcal{B}$$

という同型が得られます。

同じように考えて順序つきの基底の全体を $\mathcal{B}^{ord}$ とすると $u=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\in\mathcal{B}^{ord}$ の固定部分群は自明になってしまいますから

$$GL(n,\mathbb{C})\simeq\mathcal{B}^{ord},\qquad GL(n,\mathbb{C})\ni g\mapsto gu=(g(e_1),\cdots,g(e_n))\in\mathcal{B}^{ord}$$

が同型を与えています。これはすなわち g の行列表示に他なりません。

3.2 射影空間

まず $GL(2,\mathbb{C})$ の話からしましょう。$V=\mathbb{C}^2$ として $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\mathbb{P}^1$ を V の一次元部分空間の全体とします。$\mathbb{P}^1$ は一次元射影空間と呼ばれます。$\mathbb{P}^1$ には自然に $G=GL(2,\mathbb{C})$ が作用しています。$\mathbb{P}^1$ の一点 $u=\langle e_1\rangle\in\mathbb{P}^1$ に対してその固定部分群を求めてみますと

$$G_u=\left\{\left[\begin{array}{cc}a&b\\0&d\end{array}\right]\,\middle|\,a,b,d\in\mathbb{C},\ ad\neq 0\right\}=B$$

となることがわかります。B はボレル部分群 (のひとつ) になっています。このことから

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\simeq GL(2,\mathbb{C})/B$$

という同型がわかります。

この同型は今のところ集合論的なものですが、次のようにして解析的な同型と思うことができます (つまり $\mathbb{P}^1$ にこれが解析的同型になるような複素多様体の構造を入れる)。上の同型を利用して $\mathbb{P}^1$ に次のような座標を入れましょう。

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{P}^1&\simeq&GL(2,\mathbb{C})/B\\ \cup\!\!\!-&&\cup\!\!\!-\\ [x:y]&\leftrightarrow&\left[\begin{array}{cc}x&*\\y&*\end{array}\right]B\end{array}$$

もちろん x,y は同時にはゼロではなく、しかも $[x:y]=[\lambda x:\lambda y]$ $(\lambda\in\mathbb{C}^\times)$ です。この意味で比の記号を使いました。もともと $\mathbb{P}^1$ は $V=\mathbb{C}^2$ の一次元部分空間の全体でしたが $[x:y]$ はベクトル $\left[\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right]$ の定数倍全体のなす部分ベクトル空間 (あるいは原点を通る直線) です。

$$\mathbb{P}^1=U_0\cup U_\infty,\qquad U_0=\{[x:y]\mid y\neq 0\},\ U_\infty=\{[x:y]\mid x\neq 0\}$$

とおきましょう。すると $U_0\ni[x:y]=[x/y:1]$ と正規化できますので

$$\begin{array}{rcl}U_0&=&\{[x:1]\mid x\in\mathbb{C}\}\simeq\mathbb{C},\\ U_\infty&=&\{[1:y]\mid y\in\mathbb{C}\}\simeq\mathbb{C},\\ U_0\cap U_\infty&=&\{[x:1]\mid x\neq 0\}=\{[1:y]\mid y\neq 0\}\simeq\mathbb{C}^\times\end{array}$$

となり、結局 $\mathbb{P}^1=U_0\cup\{\infty\}$ であることがわかります。つまり複素多様体としてはリーマン球面と同一視できるわけです。このとき U_0 は 0 の近傍、U_∞ は無限遠点 ∞ の近傍になっています。

Corollary 3.1 $GL(2,\mathbb{C})$ 上の正則関数 $f(g)$ で次の性質を満たすものは定数関数しかありません。

$$f(gb)=f(g)\qquad(g\in GL(2,\mathbb{C}),b\in B)\tag{3.1}$$

Proof. $f(g)$ は $\varphi(gB)=f(g)$ と定義することによって $GL(2,\mathbb{C})/B\simeq\mathbb{P}^1$ 上の正則関数 $\varphi(x)$ を決めます。ところが $\mathbb{P}^1$ はリーマン球と同型ですからコンパクト集合です。よく知られているようにコンパクト集合の上の正則関数は定数しかありません (リウヴィルの定理)。∎

(3.1) 式の性質を「$f(g)$ は右 B 不変である」といいます。この用語を使うと上の系は

$GL(2,\mathbb{C})$ 上の右 B 不変な正則関数は定数しかない

と言い換えることができます。

さて B 不変な関数は定数しかないのですが、B に関して “ある変換則” を満たすような関数を考えると面白いことが起こります。この変換則は次のようなものを考えます。まず B 上の関数を $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対して

$$\begin{array}{ccc} B & \to & \mathbb{C}^\times \\ \Cup & & \Cup \\ b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} & \mapsto & b^\lambda = {b_{11}}^{\lambda_1} {b_{22}}^{\lambda_2} \end{array}$$

と決めます。この関数 b^λ は B 上の正則関数で、しかも $(bb')^\lambda = b^\lambda b'^\lambda$ を満たします。難しく言えばこれは群 B から $\mathbb{C}^\times$ への正則準同型です。このような準同型を (正則な) 指標といいます。

Example 3.2 B の正則な指標は $\lambda \in \mathbb{Z}^2$ に対して上のように表すことができます。また $GL(2,\mathbb{C})$ の正則な指標は $(\det g)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ に限ります。

Theorem 3.3 $GL(2,\mathbb{C})$ 上の正則関数で指標 b^λ $(\lambda \in \mathbb{Z}^2)$ について右 B 同変なもの全体を V_λ と書きます。ただし右 B 同変とは

$$f(gb) = b^\lambda f(g) \qquad (g \in G, b \in B)$$

が成り立つときに言います。このとき V_λ の次元について次が成り立ちます。

(1) $\lambda_1 < \lambda_2$ なら $V_\lambda = \{0\}$ です。

(2) $\lambda_1 \geq \lambda_2$ なら $\dim V_\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 + 1$ です。

Remark 3.4 この定理はリーマン-ロッホの定理の特別な場合とみなされます。さらに V_λ が $GL(2,\mathbb{C})$ の作用で既約であることを示せば、それはボレル-ヴェイユの定理の特別な場合となります。

Proof. $G = GL(2,\mathbb{C})$ 上の部分集合 $\widetilde{U}_0, \widetilde{U}_\infty$ を次のように取りましょう。

$$\widetilde{U}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix} \middle| \, y \neq 0 \right\}, \qquad \widetilde{U}_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$$

$\pi : G \to G/B \simeq \mathbb{P}^1$ を射影とすると明らかに

$$\pi(\widetilde{U}_0) = U_0, \qquad \pi(\widetilde{U}_\infty) = U_\infty$$

です。したがって B 同変性を考えれば $f(g)$ はこの二つの部分集合上で決まっていれば十分です。そこで

$$f_0(x,y) = f\left(\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}\right), \qquad f_\infty(x,y) = f\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}\right)$$

とおきましょう。$f_0(x,y)$ は $(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ の正則関数で、$f_\infty(x,y)$ は $(x,y) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ の正則関数です。また次の等式にも注意しておきましょう。$\alpha \neq 0$ に対して

$$f_0(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{\lambda_1} f_0(x,y), \qquad \text{とくに} \qquad f_0(x,y) = y^{\lambda_1} f_0(x/y, 1)\ (y \neq 0)$$

同様の等式が $f_\infty(x,y)$ についても成立します。

さて、共通部分 $\widetilde{U}_0 \cap \widetilde{U}_\infty$ 上では

$$f_\infty(x,y) = f\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1/y \\ 0 & -x/y \end{bmatrix}\right) = \left(-\frac{x}{y}\right)^{\lambda_2} f_0(x,y)$$

が成り立っています。したがって $z \neq 0$ なら

$$f_\infty(1,z) = (-1)^{\lambda_2} z^{-\lambda_2} f_0(1,z) = (-1)^{\lambda_2} z^{\lambda_1 - \lambda_2} f_0(1/z, 1)$$

となります。しかし一方で $f_\infty(1,z), f_0(z,1)$ は全複素平面での正則関数なので原点において収束半径が無限大の整級数に展開できます。そのように展開しておくと $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ ならそのような関数はゼロであること、$\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$ ならそのような関数は z の多項式でその次数が $\lambda_1 - \lambda_2$ 以下であることが簡単な計算でわかります。

逆にこのような関数から出発してそれを $\widetilde{U}_0, \widetilde{U}_\infty$ 上でまず与え、B 同変に拡張すると V_λ の元を与えることは明らかです。 ∎

[自分のための覚書] もちろん上の定理は (無限遠点にのみ因子を持つ) 正則直線束を使って述べたほうが記述はすっきりする。結局 B 上の G 主束の話になるわけだから。しかし今回の集中講義でそのように述べることは基礎的な知識不足の面から無理だろうと思う。

ついでのことながらリーマン-ロッホの定理を正確に述べておこう。

Theorem 3.5

$$\dim H^0(M, \mathcal{O}(\xi)) - \dim H^1(M, \mathcal{O}(\xi)) - c(\xi) = 1 - g$$

ただし M はリーマン面、$\mathcal{O}(\xi)$ は正則直線束、$\xi \in H^1(M, \mathcal{O}^\times)$、$g$ は種数、$c(\xi)$ は ξ のチャーン類。

若干の注意を与えておく。まず $H^0(M, \mathcal{O}(\xi)) = \Gamma(M, \mathcal{O}(\xi))$ は大域切断のなすベクトル空間。κ を標準束とすると

$$\dim H^1(M, \mathcal{O}(\xi)) = \dim H^0(M, \mathcal{O}(\kappa \xi^{-1}))$$

が成り立つ。また $c(\kappa) = 2g - 2$ である。

チャーン類の計算は現実には次のようにして行う。まず ξ の有理切断 $f(z) \in \Gamma(M, \mathcal{M}^\times(\xi))$ をとり、その各点での位数を計算して総和を取る。

$$c(\xi) = \sum_{p \in M} \nu_p(f) = (f \text{ のゼロ点の個数}) - (f \text{ の極の個数})$$

$M = \mathbb{P}^1$ のときには結局

$$\begin{aligned} c(\xi) < 0 \quad &\Rightarrow \quad H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\xi)) = \{0\}, \\ c(\xi) \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(\xi)) = c(\xi) + 1 \end{aligned}$$

がリーマン-ロッホの定理の内容となる。 ∎

3.3 グラム-シュミットの直交化 (= 岩澤分解)

この節では $\mathbb{C}^n$ の基底のグラム-シュミットの直交化について復習してみましょう。この直交化法は要するに任意の基底から標準的に正規直交基底を作り出すアルゴリズムを与えるものでした。忘れた人のために復習してみます。

$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の任意の基底としましょう。まず $u_1 = \|v_1\|^{-1} v_1$ とおきます。このように長さを 1 にすることを v_1 を正規化するといいます。さて $u_1, u_2, \cdots, u_k$ が決まったとして u_k を次のように決めましょう。まず

$$v'_k = v_k - \sum_{1 \leq j < k} \overline{(v_k, u_j)}\, u_j$$

とおき、 v'_k を正規化したものを u_k とします[1]。

このように作ったベクトルたち $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ が正規直交基底であることはすぐにわかります。通常線型代数で講義されるのはここまでですが、もう少しだけ踏み込んでみると新しい世界が開けます。しかしこの一歩を踏み出せずに引き返していく探検家のなんと多いことでしょうか。

作り方から明らかに

$$u_k = a_k v_k + \sum_{1 \leq j < k} b_{jk} v_j \qquad (a_k > 0, b_{jk} \in \mathbb{C})$$

と書けています。つまり

$$(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \begin{pmatrix} a_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & a_2 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & b_{jk} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$$

[1] 内積 (u, v) は後ろの変数について線型、前の変数について歪線型とします。また $v'_k \neq 0$ はもともと $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が基底であったことから従います。

これを書き直して

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \begin{pmatrix} a_1^{-1} & b'_{12} & b'_{13} & \cdots & b'_{1n} \\ & a_2^{-1} & b'_{23} & \cdots & b'_{2n} \\ & & \ddots & b'_{jk} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

とできます。左辺は任意の基底を持ってきてそれを並べたものですから、それは任意の正則行列を表します。つまり $GL(n, \mathbb{C})$ の一般の元を表しています。右辺の $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ は正規直交基底を並べたものですから、ユニタリ行列です。$n \times n$ ユニタリ行列の全体を $U(n)$ と書くことにしましょう。また u に右からかかっている行列は a_j, b_{jk} を新たに (適当な値に) 取り直すことによって次のように分解します。

$$(v_1, v_2, \cdots, v_n) = u \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & b_{jk} \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = uan$$

ここで a は対角線上に正の実数が並んでいる対角行列、n は対角線上には 1 が並んでいるような複素上半三角行列です。そのような行列の全体をそれぞれ A、N と書くことにします。容易にわかるように $U(n), A, N$ はすべて $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群になっています。

Theorem 3.6 (岩澤分解) 任意の $n \times n$ 正則行列 g は $g = uan \in U(n)AN$ とただ一通りに分解することができます。このとき

$$U(n) \times A \times N \ni (u, a, n) \to g = uan \in GL(n, \mathbb{C})$$

は多様体の微分同相を与えます。つまり多様体として $GL(n, \mathbb{C}) \simeq U(n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2} \simeq U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$ であることがわかります。

Proof. 分解できることは示しましたから、分解の一意性を示しておきましょう。まずユニタリ行列かつ上半三角行列であるようなものは単位行列に限る (つまり $U(n) \cap AN = \{1_n\}$) ことからユニタリ部分の一意性が従います。次に $A \cap N = \{1_n\}$ であることから A, N 部分の一意性が従います。

微分同相になる部分はこの写像のヤコビ行列式を計算することによって証明できます。しかしそれは結構面倒な話ですのでここでは割愛します[2]。 ∎

3.4 行列の基本変形 (= ブリュウア分解)

行列の基本変形がこの節の主眼なのですが、それと密接に関係する旗多様体についてまず述べることにしましょう。旗多様体というのは少し奇妙な名前ですが、慣れ親しむとそのネーミングの意味がかみしめられてくると思います。すでにそのような例は $\mathfrak{S}_4$ の正四面体への作用のところで出てきています。

[2] まじめにやろうとするとどうしてもリー環の話が必要になります。またヤコビ行列式に頼らないでも、グラム-シュミットの直交化の話をつぶさに追っていけばそれが微分同相になることはわかります。

$V = \mathbb{C}^n$ を n 次元のベクトル空間とするとき、次のような部分空間の列

$$\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V$$

を旗と呼びます。全部で n 個ある部分空間の狭義単調増加な列ですから $\dim V_k = k$ でなくてはなりません。このような旗の全体を旗多様体と呼びます。多様体の構造は次のようにして入ります。まず $n \times n$ の正則行列 $g = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して旗を次のようにして決めます。

$$\{0\} \subsetneq \langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_1, a_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq V_k = \langle a_1, a_2, \cdots, a_k \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

これを g^F と書きましょう。これが旗の条件を満たすことは g が正則行列であることからしたがいます。(演習問題) この対応は旗全体の空間への全射になりますが、単射ではありません。つまり $g_1 \neq g_2$ でも $g_1^F = g_2^F$ が同じ旗を表すことがあります。

Example 3.7 一番簡単な例。

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{と} \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$g_1^F = g_2^F$ であることを確かめてください。

一体いつ異なる行列が同じ旗を表すのでしょうか? その疑問にはやはり群の作用という考え方が有効です。旗の全体には明らかに $GL(n, \mathbb{C})$ が作用しています。つまり

$$g : F = (V_k)_{1 \leq k \leq n} \mapsto gF = (gV_k)_{1 \leq k \leq n}$$

というわけです。これが作用になっていることは定義のしかたから明らかでしょう。すると一番基本的な旗

$$F_0 : \{0\} \subsetneq \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle e_1, e_2, \cdots, e_k \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{C}^n$$

を g で移すとそれは g^F に一致します! 記号で書くと $gF_0 = g^F$ ですね。一方 F_0 の固定部分群は簡単な計算からボレル部分群

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

になっていることがわかります。つまり

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{C})/B & \simeq & X = (\text{旗の全体}) \\ \Cup & & \Cup \\ gB & \mapsto & gF_0 = g^F \end{array}$$

です。これから $g_1^F = g_2^F$ になるのは g_1, g_2 が同じ B の右側剰余類に入ること、あるいは $g_1^{-1} g_2 \in B$ となることであることが結論されます。

これまでのところを少しまとめておきましょう。

Theorem 3.8 $V = \mathbb{C}^n$ とします。$X = (V$ の旗の全体$)$ を旗多様体としましょう。 X には $G = GL(n, \mathbb{C})$ が自然に作用しており、その標準基底による旗 F_0 における固定部分群は上半三角行列のなすボレル部分群と一致します。つまり $G_{F_0} = B$ です。したがって $X \simeq G/B$ です。

G における B の正規化部分群は B に一致しますので、$gB \neq g'B \iff gBg^{-1} \neq g'Bg'^{-1}$ がわかります。つまり

$$Y = \{gBg^{-1} \mid g \in G\} = (G \text{ におけるボレル部分群 } B \text{ の共役部分群全体})$$

とおくと次の系が成り立ちます。

Corollary 3.9 $X \simeq G/B \simeq Y$ はすべて同型です。以後この三つの空間を以下のような標準的な同型によって同一視します。

$$\begin{array}{ccccc} X & \simeq & G/B & \simeq & Y \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ gF_0 = g^F & \leftarrow & gB & \rightarrow & gBg^{-1} \end{array}$$

Exercise 3.10 B の正規化部分群 $N_G(B)$ を

$$N_G(B) = \{g \in G \mid gBg^{-1} = B\}$$

で定めます。$G = GL(n, \mathbb{C})$ で B を上半三角行列からなるボレル部分群とするとき $N_G(B) = B$ であることを示してください。

さて g^F を旗としましょう。このとき同じ旗を与えるような $g \in GL(n, \mathbb{C})$ の中でもっとも簡単なものを取ってきたいのですが、それには行列の基本変形の考え方が有効です。g に列基本変形のうち第 i 列を何倍かして第 j 列に加える (ただし $i < j$) という変形を施したものを g' とすると $g^F = g'^F$ つまり両者は同じ旗を与えることがわかります。もちろんある列をゼロでない定数倍しても旗は不変です。

しかし一方では列を入れ替えるとか、あるいは右の列を左の列に加えるといった操作を行うと異なる旗になってしまいます。

以上の観察の下に旗 g^F に対して g を次のように変形しましょう。

1. まず第 n 行に注目して第 n 行が左から見て最初にゼロでない列を取る。この列を第 i_n 列としよう。第 i_n 列をあとの列に加え、ゼロでないものが残るのはこの列だけにする。

   定数倍することによりこの残った成分は 1 にできる。

2. 第 $n-1$ 行について先と同じことをする。しかし選ぶのは第 i_n 列を除いた列のうち左から見て最初にゼロが現われる列、第 i_{n-1} 列である。

3. どんどん続ける。

このようにして得られる行列をまた同じ記号で $g = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ と書くと、 a_{i_k} は第 k 行が 1 で、その下にはゼロが並んでいるような行列になります。以上の操作は例を計算してみるとわかりやすいでしょう。

Example 3.11 変形の例

さて、この行列 g に対して各列を並び替えてできる上半三角行列 (対角線には 1 が並ぶ) を b、 (k, i_k) $(1 \leq k \leq n)$ 成分が 1 でその他の成分はゼロになるような置換行列を w と書くと明らかに $bw = g, w = b^{-1}g$ です。

Theorem 3.12 (ブリュウア分解) 旗 g^F を B の元で移すことにより w^F (w は置換行列) の形の旗に変換できます。これはつまり両側コセット分解 $B\backslash G/B$ の代表元として置換行列がとれることを意味しています。より詳しく

$$B\backslash G/B = \coprod_{w \in W} BwB$$

が成り立ちます。ただし W は置換行列の全体を表します (これは n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同一視できるのでした)。

Proof. 代表元として置換行列がとれることはすでに示したのであとは $Bw_1B = Bw_2B \iff w_1 = w_2$ が置換行列 w_1, w_2 について成立することを示せばよい。しかしエレガントな説明を思いつけない。 ∎

この定理で得られた分解をブリュウア分解と呼びます。

ブリュウア分解の構造をもう少し詳しく調べてみます。まず分解の各成分 BwB $(w \in \mathfrak{S}_n)$ ですが、これを B で右から割ったもの BwB/B はブリュウア胞体と呼ばれ、l 次元複素ベクトル空間に同相です[3]。ここで $l = l(w)$ は w の長さと呼ばれるもので次のようにして決まります。

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の生成系を前のように $S = \{s_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ で取りましょう。すると $w \in \mathfrak{S}_n$ は S の元の幾つかの積で書くことができます。

$$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_L}$$

このような書き方はたくさんありますが、そのうち最短のものが存在します (一意的ではありませんが)。そのときの長さ L を w の長さと呼び $l(w)$ と書きます。また丁度 w の長さを与えるような積表示のことを w の簡約表示と呼びます。w は幾つか別の簡約表示を持つことがあります。

Example 3.13 $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ は二通りの簡約表示です。

長さをこのように定義すると一体それが最短表示なのかどうかを確認するのがとても面倒で、実際の計算には向きません。しかし長さは次のようにかなり形式的に計算することができます。まず w に対応する順列

$$p_w = (w(1), w(2), \cdots, w(n))$$

を考えましょう。このとき k より右にある数字で k より小さいものの個数を r_k と書きましょう。

$$r(w) = \sum_{k=1}^{n} r_k$$

を w の転倒数と呼びます。

[3] BwB 自身は $\mathbb{C}^{l(w)} \times B$ と同相である。またブリュウア胞体の閉包 $\overline{BwB}$ をシューベルト胞体と呼ぶ。

Theorem 3.14 転倒数と長さは一致します : $l(w) = r(w)$ $(w \in \mathfrak{S}_n)$.

PROOF. 証明は略します。たとえば [?] を見てください。 ∎

ここでは上のブリュウア分解を逆に利用して $w \in \mathfrak{S}_n$ の長さを図形的に捉えてみましょう。

まず w に対応する置換行列を T_w と書きましょう。T_w は各行各列にただ一つだけ 1 をもち、その他の成分はすべて 0 になるような行列です。さてこの 1 に最初に印をつけておきます (たとえば丸で囲む)。次に印のついた 1 の右横にある 0 と真上にある 0 をすべて 1 に置き換えます。もちろんすでに 1 になっているものは変化しません。このようにしてできた行列を B-hull(T_w) と書きましょう。

Proposition 3.15 $\dim BwB = (B\text{-hull}(T_w)$ に現われる 1 の個数$)$ が成り立ちます。

PROOF. 単純鏡映を施したときに長さの関係式がどう変化するかを見ればよい。しかし集中講義でそれを示してみても無駄だろう。あるいは転倒数との絡みで証明することもできる (田川君の指摘による)。

しかしこのように証明すると長さについての新しい命題を与えたわけではなく、単にその図形的解釈を与えただけというにとどまってしまう。まったく別個に長さについての関係を確立できると新証明につながる。(といっても大したことではないだろうけど)

また B-hull(T_w) の構成は山本敦子さんのドライビング図形とほぼ同じことである。さらに Macdonald の Schubert polynomial の本 [Macdonald2] にも同様の方法が掲載されている (これも田川君の指摘による)。 ∎

3.5 行列の対角化 (= カルタン分解)

次にエルミート対称行列の対角化の話を復習してみます。

$g \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して $H = g^* g$ を考えましょう。もちろん $g^* = {}^t\overline{g}$ ですね。このとき H は正定値エルミート対称行列になります。

Exercise 3.16 H が正定値エルミート対称行列になることを確かめてください。

線型代数で習った事実は

エルミート対称行列はユニタリ行列によって対角化できる

ということでした。これは次のように言っても同じことです。

エルミート対称行列に対してその固有ベクトルからなる正規直交基底がとれる

証明は一回生のときの教科書を見ていただくとしてここではその帰結するところを述べましょう。$H = g^* g$ はエルミート対称行列ですからユニタリ行列 $u \in U(n)$ が存在して

$$uHu^{-1} = \begin{pmatrix} a'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_n \end{pmatrix} \qquad (a'_i > 0)$$

と対角化されます。ここで対角成分は H の固有値ですが、H がエルミート対称なので実数、さらに正定値なので正の実数になっています。いま

$$u' = ugu^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a'_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{a'_n} \end{pmatrix}^{-1} \tag{3.2}$$

とおくと実はこれはユニタリ行列です。これを確かめましょう。右辺の最後の対角行列を $a^{-1} \in A$ とでも書いておくと、

$$\begin{aligned} u'^* u' &= (ugu^* a^{-1})^* (ugu^* a^{-1}) = a^{-1} u g^* (u^* u) g u^* a^{-1} = a^{-1} u (g^* g) u^{-1} a^{-1} \\ &= a^{-1} u H u^{-1} a^{-1} = a^{-1} a^2 a^{-1} = 1_n \end{aligned}$$

となり確かにユニタリになっていることがわかります。したがって (3.2) 式を書きなおせば

$$g = u^{-1} u' a u = u'' a u \qquad (a \in A,\ u'', u \in U(n))$$

となりますね。さらに置換行列たちは明らかにユニタリ行列ですから a の対角成分は大きいものから順に並んでいるとしてもよろしい。つまり

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \qquad (a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0)$$

このような行列の全体を A^+ と書くことにしましょう。

Theorem 3.17 (カルタン分解) 任意の正則行列 g は $g = u_1 a u_2$ $(a \in A^+, u_i \in U(n))$ と表すことができます。このとき $a \in A^+$ は g によって一意的に決まります。記号で書くと

$$GL(n, \mathbb{C}) = U(n) A U(n) = U(n) A^+ U(n)$$

となります。この分解において積は直積ではありません。

Proof. 表示できることはすでに上で示しましたから、A^+ の部分に関する一意性を示しましょう。実際それには次の補題を示せば十分です。

Lemma 3.18 $u_1 a u_2 = a'$ $(a, a' \in A^+,\ u_i \in U(n))$ ならば $a = a'$ です。さらに $u_2 = u_1^{-1} = u_1^*$ であって u_1 は a と可換です。記号で表すと $u_1 \in Z_{U(n)}(a)$ となります。ただし $Z_U(a)$ は U における a の中心化群

$$Z_U(a) = \{u \in U \mid ua = au\}$$

を表します。

Proof.

$$a'^2 = (u_1 a u_2)(u_1 a u_2)^* = u_1 a (u_2 u_2^*) a u_1^{-1} = u_1 a^2 u_1^{-1}$$

です。これより a'^2 と a^2 の固有値は一致しなくてはなりません。つまり $a = a'$ です。さらに u_1 は a^2 と可換であることがわかりますが、あきらかに a^2 と a の中心化群は一致しますから u_1 は a と可換です。したがって $u_1 u_2 = 1_n$ です。 ∎

定理のうち u_1, u_2 の一意性は成り立ちませんが、上の補題を使えばもし $u_1 a u_2 = v_1 a v_2$ となったとすると、$w \in Z_{U(n)}(a)$ が存在して

$$u_1 = v_1 w, \qquad u_2 = w^{-1} v_2$$

と表せることがわかります。 ∎

Corollary 3.19 (極分解) 任意の正則行列 g は

$$g = uh \qquad (u \in U(n),\ h : \text{正定値エルミート対称行列})$$

と一意的に表すことができます。

Proof. $g = u_1 a u_2 = (u_1 u_2)(u_2^* a u_2) = uh$ となるのでこのように表せることは定理 3.17 により明らかです。

次に一意性を示しましょう。それには $uh_1 = h_2$ なら $u = 1_n$ であることを示せば十分です。$h_i = u_i a_i u_i^*$ $(i = 1, 2)$ と対角化しておきましょう。もちろん $a_i \in A^+$ と選ぶことができますね。

$$h_2^2 = h_2^* h_2 = h_1 u^* u h_1 = h_1^2$$

ですから

$$u_1 a_1^2 u_1^* = h_1^2 = h_2^2 = u_2 a_2^2 u_2^*$$

です。ここで補題 3.18 を適用すると $a_1^2 = a_2^2, \quad \therefore \quad a_1 = a_2$ かつ $u_2^{-1} u_1 \in Z_{U(n)}(a)$ です。したがって

$$uh_1 = h_2 \Rightarrow u u_1 a u_1^* = u_2 a u_2^* \Rightarrow u u_1 a = u_2 a (u_2^{-1} u_1) = u_2 (u_2^{-1} u_1) a = u_1 a \Rightarrow u = 1_n$$

となり証明が完了しました。 ∎

この系は $n = 1$ の時に適用すると $z = e^{i\theta} r$ という複素数の極分解の式に他ならないことに注意しておきます。この事実の拡張として、正則行列をユニタリ行列と正定値エルミート対称行列の積に分解することを極分解と呼ぶわけです。

3.6 一般線型群のさまざまな分解のまとめ

この章では一般線型群をいろいろな部分群 (あるいは部分群でないものもありましたが) の積に分解してみました。たくさんの分解がでてきましたのでここでまとめておきましょう。

まず $G = GL(n, \mathbb{C})$ の部分群 (部分集合) を次のように書くことにします。

- $K = U(n)$: $n \times n$ のユニタリ行列全体 (極大コンパクト部分群)
- $A = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}_{>0}\}$、$A^+ = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0\} \subset A$
- N : 対角成分がすべて 1 の上半三角行列全体 (極大べき単部分群)
- B : 正則な上半三角行列全体 (ボレル部分群、極大可解部分群)

- W：置換行列の全体 (ワイル群と同型)

以上の記号の下に次のような分解や同型があることを見てきました。

- $\mathbb{P}^1 \simeq GL(2,\mathbb{C})/B$
- 岩澤分解：$G = KAN \simeq K \times A \times N$
- 旗多様体 $X \simeq G/B$
- ブリュウア分解：$B\backslash G/B = \coprod_{w\in W} BwB$
- カルタン分解：$G = KAK = KA^+K$
- 極分解：$G = K\mathrm{Her}^+ \simeq K \times \mathrm{Her}^+$、$\mathrm{Her}^+$ は正定値エルミート対称行列全体

4　対称式と調和多項式

4.1　対称式

n 変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ を考えます。以下記号が繁雑になるので誤解のないときにはこれを単に $\mathbb{C}[x]$ と書きましょう。さて対称群は多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に線型に作用します。つまり $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}\cdots x_n^{\nu_n}\right) &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu x_{\sigma(1)}^{\nu_1} x_{\sigma(2)}^{\nu_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{\nu_n} \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu x_1^{\nu_{\sigma^{-1}(1)}} x_2^{\nu_{\sigma^{-1}(2)}}\cdots x_n^{\nu_{\sigma^{-1}(n)}}\end{aligned}$$

です。あるいは同じことですが、$f(x) \in \mathbb{C}[x]$ とすると

$$\sigma f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}\right)$$

とも書けます。

[自分のための覚書]　この作用は多項式を関数と思ったときの作用と一見違うように見えるが実は一致している。つまり、$\sigma f(x) = f(\sigma^{-1}x)$ だが、一方で

$$\sigma^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

だから。 ∎

一般にベクトル空間への線型な作用のことを表現と呼びます。また群が作用するベクトル空間を表現空間と呼びます。この用語に従うと $\mathbb{C}[x]$ は対称群の表現空間で、対称群は $\mathbb{C}[x]$ 上の線型作用素として表現された、ということになります。まぁ、これは言葉だけの問題なのであまり気にしないことにしましょう。群の表現そのものについてはこのあとの節で基本的なことをまとめて述べることにします[4]。

多項式環はもちろんベクトル空間というだけではなく、掛け算も定義されていますが、対称群の作用はこの掛け算も保ちます。つまり $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して

$$\sigma(fg)(x) = \sigma f(x)\ \sigma g(x)$$

です。このようなとき対称群は多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の自己同型群として作用すると言います。

Definition 4.1　$f(x) \in \mathbb{C}[x]$ が対称式であるとは $\sigma f(x) = f(x)$ が任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して成り立つ時に言います。対称式の全体を $S = S[x] = S[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ と書きます[5]。

[4] ウソつけ!

[5] 一般に群 G がベクトル空間 V に作用しているときその不変元の全体を V^G で表します。この記法によれば対称式の全体は $S = \mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n}$ とも書くことができます。

対称式の全体 S は $\mathbb{C}[x]$ の中の部分環になっていることが容易にわかります。
対称式にはどのようなものがあるでしょうか? 代表的なものを少し見てみましょう。

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_it)=\sum_{k=0}^{n}e_k(x)t^k \tag{4.1}$$

左辺を展開して t のベキにまとめます。左辺は明らかに変数 $x_1,\cdots,x_n$ について対称ですから右辺の各べきの係数 $e_n(x)$ もまた対称式です。これを称して基本対称式と呼びます。基本対称式と呼ぶ理由はこの直後にも述べるようにすべての対称式がこのたった n 個の対称式で書き表されてしまい、しかもそこには無駄がないことにあります。しかし一方では基本対称式が二次式の場合の解と係数の関係を拡張したものであることもまた大きな理由の一つです。この場合対称群の作用はガロア群の作用として捉えることもできるでしょう。

[自分のための覚書] つまり $e_1,e_2,\cdots,e_n$ を $\mathbb{Q}$ 上代数的独立な超越元に取る。するとそれを係数に持つ n 次方程式のガロア群 $/\mathbb{Q}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ はちょうど対称群となる。つまり $K=\mathbb{Q}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\supset L=\mathbb{Q}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ とおくと、$K^{\mathfrak{S}_n}=L$ であって K/L はガロア拡大、$[K:L]=n!$ となる。このことから $K\simeq H\otimes L$ となる? ∎

対称式に関する基本定理は基本対称式を用いて次のように言い表すことができます。

Theorem 4.2 基本対称式は S の代数的に独立な基底です。つまり次が成り立ちます。

(1) 任意の対称式は基本対称式の多項式として表すことができます。

(2) 基本対称式の間には整数を係数とするいかなる多項式関係も存在しません。

このことは次の写像が代数としての同型写像であることと同値です。つまり S はまた n 変数の多項式環になります!

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{C}[y_1,y_2,\cdots,y_n] & \xrightarrow{\sim} & S[x] & \subset & \mathbb{C}[x]\\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ f(y_1,\cdots,y_n) & \mapsto & f(e_1(x),\cdots,e_n(x)) & & \end{array}$$

この定理を証明するために新しい対称式を導入します。$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して

$$m_\lambda(x)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma x^\lambda$$

とおきましょう。$m_\lambda(x)$ は明らかに対称多項式ですが、これを軌道和対称式と呼びます。とくに $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$ となっているような λ の全体を P^+ と表すことにすると $\{m_\lambda\mid\lambda\in P^+\}$ は S のベクトル空間としての基底になります。
この軌道和対称式を使って上の定理を証明してみましょう。

Proof. 軌道和対称式の間に λ に関する辞書式順序を導入しておきます。さて $\lambda\in P^+$ に対して $\mu\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を次のように決めます。

$$\mu_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}\ (1\leq i\leq n-1);\quad \mu_n=\lambda_n$$

すると

$$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} = x_1^{\mu_1} (x_1 x_2)^{\mu_2} \cdots (x_1, \cdots, x_n)^{\mu_n}$$

ですがこのことから

$$m_\lambda(x) - e_1(x)^{\mu_1} e_2(x)^{\mu_2} \cdots e_n(x)^{\mu_n}$$

は x^λ の項を含まず、m_λ より小さい軌道和対称式の線型和として表されることがわかります。したがって帰納法を使うと定理の前半が証明できました。

つぎに基本対称式の代数的独立性を示しましょう。n 変数多項式 $f(y) \in \mathbb{C}[y_1, \cdots, y_n]$ をとって $f(e_1(x), \cdots, e_n(x)) = 0$ となったとします。$x_n = 0$ とおくと $e_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = 0$ で、$e_i(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$ $(i \leq n-1)$ は $n-1$ 変数の基本対称式になります。このことは基本対称式の定義の式 (4.1) で $x_n = 0$ とおいてみれば明らかです。

そうすると

$$0 = f(e_1(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0), \cdots, e_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0), 0)$$

ですが、帰納法を使うと $n-1$ 変数のときの基本対称式の代数的独立性により

$$f(y_1, \cdots, y_{n-1}, 0) = 0, \qquad \therefore \quad f(y) = y_n \tilde{f}(y)$$

と表せることがわかります。ところが

$$0 = f(e_1, \cdots, e_n) = e_n \tilde{f}(e_1, \cdots, e_n), \qquad \therefore \quad \tilde{f}(e_1, \cdots, e_n) = 0$$

となってより次数の小さな多項式の話に落ちました。さらに次数に関する帰納法を使うことにより結局 $f(y) = 0$ となることがわかります。 ∎

[自分のための覚書] 別証として次のようなものもある (こちらのほうがかえって簡単)。

$\exists f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$ で $f(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 0$ となったとする。このとき $\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ であって $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0$ だが、代数学の基本定理により $\exists x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ があって

$$\alpha_i = e_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad (\forall i) \qquad (\text{解と係数の関係})$$

が成り立つ。これは $0 \neq f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = f(e_1, \cdots, e_n) = 0$ となって矛盾。これで問題の写像の単射性が分かる。

次に全射性は次数を考慮して同次数の空間の次元の比較を行えばよい。もちろん $\deg y_i = i$ として、次元の記述には分割数あるいはヤング図形を用いるのがよいだろう。 ∎

さて次に三番目の対称式、ベキ和対称式 $p_k(x)$ $(k \geq 0)$ を次のように与えましょう。

$$p_k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

また基本対称式、ベキ和対称式については $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して

$$e^\lambda(x) = e_1(x)^{\lambda_1} e_2(x)^{\lambda_2} \cdots e_n(x)^{\lambda_n}, \qquad p^\lambda(x) = p_1(x)^{\lambda_1} p_2(x)^{\lambda_2} \cdots p_n(x)^{\lambda_n}$$

と定めておきます。

さて基本対称式とベキ和対称式の間には次のニュートンの公式と呼ばれる関係式が成り立ちます。

Theorem 4.3 (ニュートンの公式) 基本対称式とベキ和対称式の間に次の漸化式が成り立ちます。

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j p_{k-j}e_j = p_k - e_1p_{k-1} + \cdots + (-1)^k e_k p_0 = (-1)^k(n-k)e_k \qquad (1 \le k \le n)$$

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j p_{k-j}e_j = p_k - e_1p_{k-1} + \cdots + (-1)^n e_n p_{k-n} = 0 \qquad (n \le k)$$

この漸化式から $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ もまた S の代数的に独立な基底であることがわかります。

PROOF. まず公式を $k = n$ の場合に示しましょう。それには次の対角行列を考えるのが便利です。

$$X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

すると $\mathrm{trace}\, X^k = p_k(x)$ となることに注意しましょう。このとき

$$0 = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j X^{n-j}e_j(x)$$

となります (左辺は X の最小多項式でゼロになります)。この式の両辺の跡を取ると証明すべき式が得られます。同様にして上の式の両辺に X^l を掛けてから跡を取ることにより $k > n$ の場合も証明できます。

少し考察が必要なのは $1 \le k < n$ の場合です。まず次数に関する考察から証明すべき式の左辺は基本対称式により

$$\alpha e_k(x) + (e_i(x)\ (1 \le i < k) \text{ の多項式})$$

と書けます。ところでこの式において $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$ とおくと左辺は $k = n$ の場合の式に帰着して $(-1)^k(n-k)e_k(x)$ です。思わずこれをゼロとしてしまいそうですが、ゼロにならないのは $p_0(x) = n = k + (n-k)$ だからで、p_0 に対しては上のように x を特殊化しても変化がないことが原因です。さて右辺では x を特殊化しても式自体は変わりません。相変わらず $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ は代数的独立です。このことから実は $\alpha = (-1)^k(n-k)$ であって、残りの $(e_i(x)\ (1 \le i < k)$ の多項式) の部分はゼロになることがわかります。

最後に $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ が代数的に独立な基底になっていることを示しましょう。実際ニュートンの公式から基本対称式がベキ和対称式で書けることがわかりますから、生成系であることは OK です。代数的な独立性については次のようにしてわかります。ニュートンの公式を用いてベキ和対称式を基本対称式で表すと

$$p_k = (-1)^{k+1}ke_k + (e_i(x)\ (1 \le i < k) \text{ の多項式}) \qquad (1 \le k \le n)$$

となります。したがって $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対して、$\lambda_n, \lambda_{n-1}, \cdots$ と比較してゆくような辞書式順序を入れると[6]、$p^\lambda(x) = \alpha e^\lambda(x) + (\text{低次の項})\ (\alpha \ne 0)$ となることがわかります。このことからベキ和対称式の代数的独立性は基本対称式のそれに帰着します。 ∎

[6] 以前入れた辞書式順序とはちょうど逆になるので注意してください。

[自分のための覚書] [Macdonald1, §I.2] から少し関係ある式を拾いだしておく。ただし上の議論は [Macdonald1] とは独立である (もっとも似たような議論にはなるが)。記号は本文中においても [Macdonald1] と一致するようにしてある。また一般に分割 λ に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots$$

という記号を使う。これは p_λ, h_λ などでも同じことである。本文中に用いた e^λ, p^λ とは根本的に異なるので注意せよ。

本文中で定義した対称式に加えて完全対称式 $h_k(x)$ を

$$h_k(x) = \sum_{|\lambda|=k} m_\lambda(x)$$

で定義する。完全対称式は基本対称式の双対とも言える対称式である。もちろんこの他にシュアー関数があるわけだがここでは触れない。

母関数はそれぞれ次のようになる。

- 基本対称式 e_k :
$$E(t) = \prod_{i\geq 1}(1+x_i t) = \sum_{r\geq 0} e_r t^r$$
- 完全対称式 h_k :
$$H(t) = \prod_{i\geq 1}(1-x_i t)^{-1} = \sum_{r\geq 0} h_r t^r$$
- ベキ和対称式 p_k :
$$P(t) = \sum_{r\geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{1-x_i t} = \sum_{i\geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1-x_i t}$$

母関数の間の関係とそれによる対称式間の関係

- $E(t)H(-t) = 1$:
$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$$
- $P(t) = H'(t)/H(t)$:
$$n h_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}$$
これはニュートンの公式の双対版である。さらにこの式から
$$H(t) = \exp\left(\sum_{r\geq 1} p_r \frac{t^r}{r}\right)$$
がわかる。

- $P(t) = E'(t)/E(t)$: これよりニュートンの公式が従う。さらにまた

$$E(t) = \exp\left(-\sum_{r\geq 1} p_r \frac{(-t)^r}{r}\right)$$

が成り立つことがわかる。

最後にこの三種の対称式 e_k, p_k, h_k の間の変換公式 (漸化式ではなく、完全に書き下した式) が行列式を用いて書ける。三種類あるので変換公式は全部で 6 個ある。ここでは次の二つだけをあげておく。残りは [Macdonald1, §I.2, Ex. 8 (p. 28)] を見よ。

$$e_n = \det(h_{1-i+j})_{1\leq i,j\leq n}, \qquad h_n = \det(e_{1-i+j})_{1\leq i,j\leq n}$$

∎

4.2 交代式

二変数の多項式においては交代式というのがありました。これは変数を入れ替えると符号が出るような多項式でしたが、結局交代式は最簡交代式 $x-y$ と対称式の積になるのでした。さらに一般の多項式は対称式とこの交代式との和に一意的に分解しますから、それを考えあわせれば任意の多項式 $f(x,y)$ は

$$f(x,y) = f_0(x,y) + (x-y)f_1(x,y) \qquad (f_0(x,y), f_1(x,y) : \text{対称式}) \tag{4.2}$$

とただ一通りに表すことができます。

Exercise 4.4 上の事実を自分で再確認してみてください。

最後の式 (4.2) は抽象的に表すと

$$f(x,y) \in (\mathbb{C}1 + \mathbb{C}(x-y)) \cdot (\text{対称式})$$

あるいはもっと抽象的に

$$\mathbb{C}[x,y] = (\mathbb{C}1 + \mathbb{C}(x-y)) \cdot (\text{対称式})$$

と書くことができます。この書き方においては式 (4.2) における一意性が表されていません。ところですでに習った (と思われる) テンサー積を用いるとこの一意性がきちんと表されます。

$$\mathbb{C}[x,y] \simeq (\mathbb{C}1 + \mathbb{C}(x-y)) \otimes (\text{対称式})$$

Exercise 4.5 テンサー積の定義を復習して確かに上の式が (4.2) 式における一意性を表していることを確認してください。

さて以上の話は比較的簡単でしかも二変数の多項式特有の話に思えますが、実はそれがそうでもないのです。開拓精神が旺盛な人はきっと三変数でも似たような話がないか考えてみられたことでしょう。確かに三変数の交代式ではやはりそれは最簡交代式で割り切れ、残りは対称式です。この場合最簡交代式は差積と呼ばれる三次式になります。

$$(\text{最簡交代式}) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

このように交代式は扱えますが、これでは任意の多項式を扱うことができません。このあたりで壁にぶちあたった方は多いのではないかと思います。

教科書を参照しようとしても、そのような話は大学初年級までの教科書にはあまり書いてありません。実際二変数と三変数のギャップはかなり大きく、それは二変数の対称式が (自明ではない) 一番簡単な可換群 $\mathfrak{S}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$ の作用を考えるのに対して、三変数の対称式が一番簡単な非可換群 $\mathfrak{S}_3$ の作用を考えなければいけないことに起因しています。

Exercise 4.6 $\mathfrak{S}_3$ が位数最小の非可換群であることを証明してください。

以下の節ではこのような二変数の場合の多項式の分解を一般の n 変数で考えてみることにします。

4.3 調和多項式

定数係数の n 変数偏微分作用素は要するに $\partial_1, \cdots, \partial_n$ の多項式です。偏微分作用素の合成は明らかに多項式と思ったときの積に対応します。つまり定数係数偏微分作用素の全体は多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ と同型です。そこでこの同型を次のように固定することにしましょう。

$$\begin{array}{rccc} \partial: & \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] & \simeq & \mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n] \\ & \Cup & & \Cup \\ & f(x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \partial(f) = f(\partial_1, \cdots, \partial_n) \end{array}$$

つまり x_i を ∂_i だと思えということです。

このように考えるともちろん対称群は定数係数の偏微分作用素たちに作用する事になります。このような作用は直接的に偏微分記号たちの間の添字の入れ替えと思ってもよいのですが、他にも考え方はあります。

- 上の同型を通して、多項式環上の対称群の作用を偏微分作用素への作用と思う。
- 定数係数の偏微分作用素は多項式たちへの作用で完全に決まる。多項式には対称群が働いているのだからその双対作用が偏微分作用素たちの上に定義できる。

実はこれらの作用は (うまくやったので) すべて一致します。皆さんはあまり難しく考えずに単に添字の入れ替えと思うのがよいでしょう。ただ上の二つの考え方は数学においてはよく出てきますし、群の作用を新しい空間に定義するには有効な手段でもありますからちょっとだけ頭の隅にでもとめておいてください。

$S = S[x_1, \cdots, x_n]$ で対称式の全体を表すのでしたが、このうち定数項が消えているもの全体を S_+ と書くことにします。

Definition 4.7 $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ が調和多項式であるとは $\partial(f)h = 0$ $(\forall f \in S_+)$ となるときに言います。調和多項式の全体を $\mathcal{H}$ と書きます。

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathbb{C}[x] \mid \partial(f)h = 0 \quad (f \in S_+)\}$$

対称式は基本対称式とかベキ和対称式で生成されていて、$\partial : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[\partial]$ は代数の同型ですから、結局調和多項式は n 個の連立偏微分方程式の多項式解と言うこともできます。たとえばベキ和対称式を用いると

$$h(x) : \text{調和多項式} \iff \sum_{i=1}^{n} \partial_i^k h(x) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

となりますね。もちろん基本対称式を用いても構いません。

Remark 4.8 偏微分方程式の解と考えるときに C^∞ 関数の範囲で考えても多項式解しか出てこない ([Helgason])。

Example 4.9 最簡交代式、あるいは差積

$$\Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

は調和多項式です。実際 $f \in S_+$ に対して $\partial(f)\Delta(x)$ はまた交代式ですが、交代式は最簡交代式で割り切れなければなりません。しかし $\partial(f)\Delta(x)$ の次数は明らかに $\Delta(x)$ より小ですからゼロになるしかありません。

さていったん $\Delta(x)$ が調和になるとその偏微分はすべて調和多項式です。このように調和多項式は十分にたくさんあります。実は任意の調和多項式は $\Delta(x)$ の適当な偏微分になることをあとで証明します (定理 5.17)。

Exercise 4.10 次のように帰納法を用いて $\Delta(x)$ の偏微分全体が $n! = \#\mathfrak{S}_n$ 以上の次元の部分空間になることを確認してください。(実際は丁度 $n!$ 次元になることがあとで分かります (定理 5.17))

(1) $\Delta(x)$ を x_n に関して展開します。その係数はもちろん $x_1, \cdots, x_{n-1}$ の多項式になります。

$$\Delta(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n^k$$

このとき $\pi_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \Delta_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})$ であることを示してください。

(2) 帰納法を使うと $\Delta(x)$ に $\mathbb{C}[\partial_1, \cdots, \partial_{n-1}]$ の元を作用させて $(n-1)!$ 次元以上の空間が得られます。それは単に x_n^{n-1} の係数を見ればよいだけです。

(3) そのあとで ∂_n^k を作用することにより全体の次元が $n! = (n-1)! \cdot n$ 以上であることを確認してください。

さて、我々の当面の目標は次の定理です。

Theorem 4.11 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \simeq \mathcal{H} \otimes S$ (ベクトル空間として) であって、同型は積写像で与えられます。つまり

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \otimes S & \simeq & \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \\ \Cup & & \Cup \\ h(x) \otimes e(x) & \mapsto & h(x)e(x) \end{array}$$

対称式の全体 S はまた多項式環なのでこの定理は

任意の多項式が調和多項式を係数とする基本対称式の多項式で書ける

ことを表しています[7]。もちろん基本対称式でなくてもベキ和対称式でも構いません。このように一見単純に見える定理は実は豊富な内容を含んでいることがわかりますが、それは次節にまわすことにして先にこの定理を証明してしまいましょう。

Definition 4.12 $\mathbb{C}[x]$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \partial(\overline{f(x)}) g(x) \Big|_{x=0}$$

で決めます。ただし $\overline{f(x)}$ は (係数の) 複素共役を表します。

実際に上の定義で内積になることは確認しなくてはなりませんが、単項式の全体が直交基底になることが容易に確かめられますので内積になることがわかります。

Exercise 4.13 単項式 $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ に対して

$$\langle x^\lambda, x^\mu \rangle = \begin{cases} 0 & (\lambda \neq \mu) \\ \lambda! = \lambda_1! \cdots \lambda_n! & (\lambda = \mu) \end{cases}$$

となることを確かめてください。

[自分のための覚書] もちろんこの内積はフォック内積である。エルミート多項式を使って積分を用いて書ける (はず)。 ∎

Lemma 4.14 $\langle x_i f(x), g(x) \rangle = \langle f(x), \partial_i g(x) \rangle$ が成り立ちます。もっと一般的に

$$\langle h(x) f(x), g(x) \rangle = \langle f(x), \partial(\overline{h(x)}) g(x) \rangle \quad (\forall h(x) \in \mathbb{C}[x])$$

が成り立ちます。

Proof. 定義からほぼ明らかでしょう。 ∎

Proposition 4.15 次の直交分解が成り立ちます。

$$\mathbb{C}[x] = \mathcal{H} \oplus S_+ \mathbb{C}[x]$$

[7] つまり対称式の係数を調和多項式で "拡大する"。

Proof. 調和多項式と対称式から生成されるイデアルが直交することはほぼ明らかでしょう。つまり $\mathcal{H}\perp S_+\mathbb{C}[x]$ がなりたちます。そこで $h(x)\perp S_+\mathbb{C}[x]$ としましょう。すると $e(x)\in S_+,\ g(x)\in\mathbb{C}[x]$ に対して[8]

$$0=\langle e(x)g(x),h(x)\rangle=\langle g(x),\partial(e(x))h(x)\rangle$$

ここで $g(x)=\partial(e(x))h(x)$ とおくと

$$0=\|\partial(e(x))h(x)\|^2,\quad\therefore\quad\partial(e(x))h(x)=0$$

となります。これは $h(x)$ が調和であることを意味します。 ∎

Corollary 4.16 任意の多項式は調和多項式と対称式の積 (の和) として表されます。

$$\mathbb{C}[x]=\mathcal{H}\cdot S$$

つまり定理 4.11 の写像は全射です。

Proof.

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x] &= \mathcal{H}\oplus S_+\mathbb{C}[x]\\ &= \mathcal{H}\oplus S_+\left(\mathcal{H}\oplus S_+\mathbb{C}[x]\right)\\ &= \cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}\cdot\left(S_+\right)^k\\ &= \mathcal{H}\cdot S\end{aligned}$$

∎

定理 4.11 を示すにはあとは定理の写像が単射であることを示せば十分です。これを示しましょう。

Lemma 4.17

$$f(x)=\sum_{\mu}h_\mu(x)e^\mu(x)=0\quad\left(h_\mu(x)\in\mathcal{H},\ e^\mu(x)=e_1(x)^{\mu_1}e_2(x)^{\mu_2}\cdots e_n(x)^{\mu_n}\right)$$

とすると $h_\mu(x)=0\ (\forall\mu)$ です。

Proof. 警告!! 以下の証明は **真っ赤なウソ** である。注意せよ。
まず一階の微分作用素 D を

$$D=\sum_{i=1}^{n}\partial_i$$

とおきましょう。すると

$$De_k(x)=(n-k+1)e_{k-1}(x)\quad(1\le k\le n)$$

[8] 面倒なので $\overline{e(x)}=e(x)$ とした。

となることに注意しましょう。(演習問題 4.18 参照) したがって

$$0 = Df(x) = \sum_{\mu} \{(Dh_{\mu}(x))\, e^{\mu}(x) + h_{\mu}(x)\, (De^{\mu}(x))\} = \sum_{\mu} h_{\mu}(x)\, (De^{\mu}(x))$$

ところが

$$De^{\mu}(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (n-j+1) e^{\mu - \varepsilon_j}(x)$$

ですから結局 $f(x)$ の次数を一つ下げることができて帰納法により証明されます。 ∎

これで定理 4.11 の積写像が全単射であることがわかりました。

Exercise 4.18 基本対称式に対して

$$De_k(x) = (n-k+1) e_{k-1}(x) \quad (1 \leq k \leq n)$$

となることを次の要領で示してください。

(1) 基本対称式の定義式を

$$\prod_{i=1}^{n} (t + x_i) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) t^{n-k}$$

と書き直します。

(2) 次に左辺を D で微分した結果と t で偏微分した結果が一致することを確かめてください。

(3) 右辺を D で微分した結果と t で偏微分した結果を比較してください。

5　多項式環上の対称群の表現

前章で多項式環が調和多項式係数の対称式として表されることを見ました。

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \simeq \mathcal{H} \otimes S[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

この同型は実は対称群の表現としての同型になります。

一般にベクトル空間 V があったとき V から V 自身への正則な線型写像全体のなす群を $GL(V)$ と書きます。V が n 次元空間なら $GL(V)$ は $n \times n$ の正則行列の全体ですね。表現というと少し難しそうですが、群 G の V 上の表現とは単に G から $GL(V)$ への群の準同型のことを指します。

U 上の表現 $\tau : G \to GL(U)$ と V 上の表現 $\rho : G \to GL(V)$ があったとき、二つの空間のテンサー積上にも自然に表現が定義できます。

$$\begin{array}{rccc} \tau \otimes \rho : & G & \to & GL(U \otimes V) \\ & \Cup & & \Cup \\ & g & \mapsto & \tau(g) \otimes \rho(g) \end{array}$$

これをテンサー積表現と呼びましょう。もちろん対称群は $\mathcal{H}$ にも S にも自然に作用しています (対称式の定義から、後者には対称群は自明に作用します)。したがってそのテンサー積表現が考えられますが、この場合 (対称式の係数) = (調和多項式) に対称群が作用することになります。つまり

対称群の多項式環上への作用 (= 表現) は調和多項式上の表現が理解できれば完全にわかる

ということです。

[自分のための覚書]　ここらあたりで群の表現の一般論を少しぐらいやっておくべきか?　∎

この章では調和多項式上の対称群の表現が一体どうなっているのかを調べます。まず手始めに調和多項式の空間 $\mathcal{H}$ が有限次元で、その次元が $n! = \#\mathfrak{S}_n$ に等しいことを見ておきましょう。

5.1　ポアンカレ級数

多項式環のように次数によって有限次元の空間に分かれているような環を次数付き環と呼びます。また単なるベクトル空間でも次数によって直和に分かれているときに次数付き空間といいます。たとえば

$$V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k$$

という具合に直和分解していれば V_k の元を斉次 k 次の元であるといいます。

Definition 5.1 次数付き空間

$$V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k \quad (\dim V_k < \infty)$$

が与えられたとき、次の形式的べき級数をポアンカレ級数と呼びます。

$$P_V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\dim V_k) t^k$$

Example 5.2 $V = \mathbb{C}[x]$ (一変数多項式環) に通常の次数付けを行ったときそのポアンカレ級数は

$$P_V(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$$

となります。

Lemma 5.3 U, V をそれぞれ次数付き空間とし、$W = U \otimes V$ に自然な次数付けを行って次数付き空間とします。すなわち

$$W = \bigoplus_{k=0}^{\infty} W_k, \quad W_k = \sum_{j=0}^{k} U_j \otimes V_{k-j}$$

とするわけです。このときポアンカレ級数たちの間には次の関係式が成り立ちます。

$$P_W(t) = P_U(t) P_V(t)$$

Proof. 定義よりほぼ明らかでしょう。 ∎

Example 5.4

- $V = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に多項式としての自然な次数付けを行ったときそのポアンカレ級数は

$$P_V(t) = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k \tag{5.1}$$

となります。最右辺は単に斉次 k 次式の次元を書き並べたにすぎません。一方最初の表示は

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \simeq \otimes^n \mathbb{C}[x] \qquad \text{(次数付き空間として)}$$

であることと、例 5.2 および上の補題 5.3 より分かります。

- もっと一般に $\deg x_i = d_i$ としたとき次数付き空間 $V = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ のポアンカレ級数は

$$P_V(t) = \frac{1}{(1-t^{d_i})^n}$$

となります。この場合右辺を具体的に展開する公式は分割関数を含んだ複雑な式になります。この式も基本的に上の例と同じことです。

Exercise 5.5 次の式の両辺を $n-1$ 階微分することによって (5.1) 式を導いてください。

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

[自分のための覚書]

- 多様体のポアンカレ多項式 (コンパクトリー群?)
- 保型形式のポアンカレ級数 (井草さんの本)

∎

Theorem 5.6 調和多項式の空間 $\mathcal{H}$ に多項式としての自然な次数付けを与えたときそのポアンカレ級数は

$$P_{\mathcal{H}}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-t^k}{1-t} = \prod_{k=1}^{n} (1 + t + t^2 + \cdots + t^{k-1})$$

で与えられます。とくに $\mathcal{H}$ は有限次元で、 $\dim \mathcal{H} = n!$ です。また調和多項式の最高次数のものは $n(n-1)/2$ 次で差積 $\Delta(x)$ の定数倍です。

Proof. 定理 より

$$P_{\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]}(t) = P_{\mathcal{H}}(t) P_S(t)$$

ですが、左辺は上の例 5.4 より $1/(1-t)^n$ です。また対称式の空間 S も実は多項式環でその生成元は $e_k(x)$ と取れることが分かっています (定理 4.2)。つまり

$$S = \mathbb{C}[e_1, e_2, \cdots, e_n], \qquad \deg e_k(x) = k$$

です。したがってやはり上の例 5.4 よりそのポアンカレ級数は

$$P_S(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-t^k}$$

です。したがって

$$P_{\mathcal{H}}(t) = \frac{P_{\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]}(t)}{P_S(t)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-t^k}{1-t}$$

となります。あとの主張はすべて明らかでしょう。 ∎

この定理で調和多項式の次元についてはよく分かりましたが、ポアンカレ級数を使っている限りは対称群の表現についての情報を得ることはほとんど不可能です。具体的には表現の次元に関することしか分からない事になります。そこで以下の節では対称群の表現としての構造を詳しく見ることにしましょう。

5.2 有限群の群環と正則表現

この節では一般の有限群 G に関してその正則表現に関する事実をおさらいしておきましょう。以下この節では G は有限群とします。

Definition 5.7 G の元全体を基底とするベクトル空間

$$V = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}\, g$$

に G の群としての積を双線型に拡張した積を考えます。すると V はベクトル空間としての和とこの積に関して代数になります。V を G の群環と呼んで $V = \mathbb{C}[G]$ と書きます。

[自分のための覚書] もちろん群環は $L^1(G)$ に合成積で積を定義した代数と同型になる。このことは多面的な見方を与える例として注意することが望ましい。また合成積を考えて代数と見るときには $L^1(G)$ でよいが、正則表現の表現空間と考えるときにはやはり $L^2(G)$ と考えるのが望ましいだろう。 ∎

群環の元に左から G の元 g を掛けるとそれは $V = \mathbb{C}[G]$ から V 自身への正則な線型写像を与えます。明らかにそれは G から $GL(V)$ への単射準同型写像を引き起こしますから、G の $V = \mathbb{C}[G]$ 上の表現が得られた事になります。これを G の (左) 正則表現と呼びます。

実は正則表現は G のすべての表現を包摂するような表現で “巨大な” 表現といえます。一般に有限群 G のとても大きな表現が与えられたとき、それを表現の最小単位 (= 既約表現) に分解してその和として元の表現を表すことができます。これを表現の既約分解と呼びます。正則表現がすべての表現を包摂すると言ったのは、正則表現を分解するとその中に G のすべての既約表現が現われるという意味です。

このあたりの精確な定義や表現の分解に関することは有限群の表現の教科書 (たとえば [?]) を参照してもらうことにして、我々は次の定理 5.8 を認めて正則表現がどのように分解するかを荒っぽく見ておくことにします。以下 $G^\wedge$ で G の既約表現 (の同値類) 全体を表し、既約表現 $\tau \in G^\wedge$ の表現空間を U_τ と書くことにしましょう。

Theorem 5.8 $\rho : G \to GL(V)$ を G の表現とするとき次の同型が成り立ちます。

$$V \simeq \bigoplus_{\tau \in G^\wedge} \mathrm{Hom}_G(U_\tau, V) \otimes U_\tau \tag{5.2}$$

ただし

$$\mathrm{Hom}_G(U_\tau, V) = \{A : U_\tau \to V : \text{線型写像} \mid A\tau(g) = \rho(g)A \ (\forall g \in G)\}$$

は繋絡作用素 (**intertwining operator**)[9]の空間で、同型は

$$\mathrm{Hom}_G(U_\tau, V) \otimes U_\tau \ni A \otimes u \mapsto A(u) \in V$$

(の和) で与えられます。

この定理における分解 (5.2) は表現 V の既約表現への分解で、$\mathrm{Hom}_G(U_\tau, V) \otimes U_\tau$ の部分を τ 等質成分 (**isotypic component**) と呼び、さらに $\dim \mathrm{Hom}_G(U_\tau, V)$ を τ の重複度といいます。

[9]「繋絡」の用語は数学辞典による。しかしあまり良い訳語とは思えない。

さて定理を正則表現に適用してみましょう。正則表現を $\rho : G \to GL(V = \mathbb{C}[G])$ と書きます。すると

$$\mathrm{Hom}_G(U_\tau, V) \simeq U_\tau^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U_\tau, \mathbb{C})$$

です。実際この同型は $A \in \mathrm{Hom}_G(U_\tau, V)$ に対して U_τ^* の元 $U_\tau \ni u \to A(u)_e \in \mathbb{C}$ を対応させれば得られます。ここに $f \in \mathbb{C}[G]$ に対して G の単位元 e の係数を f_e と書きました。

Exercise 5.9 上の写像 $\mathrm{Hom}_G(U_\tau, V) \ni A \mapsto (u \mapsto A(u)_e) \in U_\tau^*$ が同型であることを以下のようにして示してください。

(1) まず与えられた写像が単射であることを示してください。

(2) 次に $\varphi \in U_\tau^*$ に対して $A_\varphi \in \mathrm{Hom}_G(U_\tau, V)$ を

$$A_\varphi(u) = \sum_{g \in G} \varphi(\tau(g)^{-1}u)g \quad \in \mathbb{C}[G] = V$$

と決めましょう。これが実際に写像を決めること、さらに与えられた写像の逆写像になっていることを確認してください。

[注] 実際には上の小問のうち最初の単射性は必要ありません。しかしとにかく単射性を確かめておくことをお勧めします。

結局定理により次のことが分かります。

Theorem 5.10 G の正則表現の既約分解は次のように与えられます。

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\tau \in G^\wedge} U_\tau^* \otimes U_\tau$$

つまり各既約表現は分解に重複度 $\dim U_\tau^* = \dim \tau$ づつ現われます。

[自分のための覚書] もちろん上の分解において $G \times G$ の表現を考えるならば重複度自由な分解が得られる。今の場合 U_τ^* の方は単に重複度の空間と考えられており、G の作用はないことに注意せよ。しかしこのことを講義中に説明する必要は特にないだろう。余計な混乱を招くだけで得るものはない。 ∎

Corollary 5.11 表現の次元に関して次の等式が成り立ちます。

$$\#G = \sum_{\tau \in G^\wedge} (\dim \tau)^2$$

とくに G の既約表現の同値類は有限個しかなく、その総数はたかだか $\#G$ 以下であることがわかります。

もちろんよく知られているように指標の理論を使えば実は $\#G^\wedge = (G$ の共役類の個数$)$ であることがわかります。

Exercise 5.12 G が有限可換群であるとします。このとき次を示してください。

(1) G の既約表現はすべて一次元表現です。

(2) G の既約表現の個数は丁度 $\#G$ 個です。

(3) $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ のとき既約表現全体を決定してください。

5.3 対称群の調和多項式の空間上の表現

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対して

$$e^{(\lambda,x)} = \exp\left(\sum_{1\leq k\leq n} \lambda_k x_k\right)$$

と書きましょう。たとえば $\delta = (n, n-1, \cdots, 2, 1)$ なら

$$e^{(\delta,x)} = \exp\left(\sum_{1\leq k\leq n} k x_k\right)$$

となります。さらに対称群の元 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対して $w(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_{w^{-1}(1)}, \lambda_{w^{-1}(2)}, \cdots, \lambda_{w^{-1}(n)})$ と決めて指数関数たちの集合

$$\left\{e^{(w\delta,x)} \mid w \in \mathfrak{S}_n\right\}$$

を考えましょう。これらの関数たちは一次独立でその個数は $\#\mathfrak{S}_n = n!$ 個あります。この関数たちから生成されたベクトル空間 $\mathcal{E}$ は対称群の群環と同型で、しかも対称群の作用を

$$\rho(s)e^{(w\delta,x)} = e^{(sw\delta,x)} \qquad (s \in \mathfrak{S}_n)$$

と定義することにより対称群の表現として同型になります。つまり

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} a_w e^{(w\delta,x)} \;\middle|\; a_w \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}[G] \tag{5.3}$$

という同型が対称群の表現として成り立つわけです。

Exercise 5.13 指数関数たちの集合

$$\left\{e^{(w\delta,x)} \mid w \in \mathfrak{S}_n\right\}$$

が一次独立であることを示してください。

さらに δ ではなく一般の $\lambda \in \mathbb{C}^n$ に対して指数関数を考えるとどうなるかを考えてみてください。

以下では $\mathcal{E}$ と調和多項式の空間 $\mathcal{H}$ の間の自然な写像について調べることにしましょう。この写像たちを調べることによって $\mathcal{H}$ の対称群の表現としての構造が明らかになります。

$k \geq 0$ に対して線型写像

$$\varphi_k : \mathcal{E} \to \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

を

$$\varphi_k(e^{(w\delta,x)}) = \frac{1}{k!}(w\delta, x)^k$$

で決めましょう。この写像は明らかに対称群の表現の繋絡作用素です。記号で書くと $\varphi_k \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathcal{E}, \mathbb{C}[x])$ となります。したがってこの写像の像とか核は対称群の作用で不変であって部分表現を定めることに注意しましょう。さて $\mathcal{E}$ の部分空間を

$$\mathcal{E}_k = \{E \in \mathcal{E} \mid \varphi_j(E) = 0 \ (0 \leq j < k)\} = \bigcap_{0 \leq j < k} \ker \varphi_j$$

と決めます。そうすると $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ とおくことによって

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{E}_{n!} = \{0\}$$

となる部分表現の減少列 (フィルター付け) が得られます。

Exercise 5.14 $\mathcal{E}_{n!} = \{0\}$ であることを証明してください。
[Hint] 基本的にはファンデルモンドの行列式を使えばよいでしょう。

Lemma 5.15 $\varphi_k(\mathcal{E}_k) \subset \mathcal{H}$ です。

Proof. $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ を斉次多項式でその次数が d であるとします。定義から明らかに

$$\partial(f)e^{(w\delta,x)} = f(w\delta)e^{(w\delta,x)} \tag{5.4}$$

および

$$\varphi_j(\partial(f)E) = \partial(f)\varphi_{j+d}(E) \qquad (E \in \mathcal{E}) \tag{5.5}$$

となっています。

さらに $f(x) \in S$、つまり $f(x)$ を対称多項式とすると (5.4) より

$$\partial(f)e^{(w\delta,x)} = f(w\delta)e^{(w\delta,x)} = f(\delta)e^{(w\delta,x)}$$

なので $\partial(f) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ はスカラー作用素になります。つまり $\partial(f)$ は $\mathcal{E}$ 上では単に $f(\delta)$ 倍するだけの写像になります。一方 (5.5) よりもし $E \in \mathcal{E}_k$ なら $d \geq 1$ に対して

$$\partial(f)\varphi_k(E) = \varphi_{k-d}(\partial(f)E) = f(\delta)\varphi_{k-d}(E) = 0$$

となり $\varphi_k(E) \in \mathcal{H}$ であることがわかります。 ∎

$\mathcal{E}$ のフィルター付けから定まる次数付き加群を

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{E} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}_k/\mathcal{E}_{k+1}, \qquad \mathrm{gr}_k\,\mathcal{E} = \mathcal{E}_k/\mathcal{E}_{k+1}$$

で定めましょう。上の補題により

$$\varphi_k : \mathrm{gr}_k \mathcal{E} \to \mathcal{H}_k = (k \text{ 次斉次調和多項式全体})$$

であることがわかります。

Theorem 5.16 対称群の表現として $\mathrm{gr}_k \mathcal{E} \simeq \mathcal{H}_k$ です。したがって

$$\mathcal{H} \simeq \mathrm{gr}\, \mathcal{E} \simeq \mathcal{E} \simeq \mathbb{C}[G]$$

が成り立ちます。つまり調和多項式の空間 $\mathcal{H}$ 上の対称群の表現は正則表現と同値です。

Proof. 最初の主張だけを証明すればあとは有限群の表現の一般論より明らかです[10]。
まず定義の仕方により $\varphi_k : \mathrm{gr}_k \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ は単射です。したがって

$$\Phi = (\varphi_k) : \mathrm{gr}\, \mathcal{E} \to \mathcal{H}$$

は単射ですが、両辺の次元を比べればどちらも $n!$ なので (定理 5.6 と式 (5.3) を参照)、全射でもあります。 ∎

5.4 調和多項式の構造

Theorem 5.17 $\Delta(x) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ を差積とします。このとき

$$\mathbb{C}[\partial_1, \partial_2, \cdots, \partial_n]\Delta(x) = \mathcal{H}$$

が成り立ちます。さらに次のことがわかります。

(1) $f(x) \in S_+\mathbb{C}[x]$ に対して $\partial(f)\Delta(x) = 0$

(2) $f(x) \in \mathcal{H}, f(x) \neq 0$ ならば $\partial(f)\Delta(x) \neq 0$

Proof. 演習問題 4.10 より差積の微分全体は $n!$ 次元以上あります。一方、例 4.9 よりそれらはすべて調和多項式です。調和多項式の全体は $n!$ 次元ですから結局両者は一致します。
(1) は $\Delta(x)$ が調和であることから明らかです。そこで (2) を示しましょう。もし $\partial(f)\Delta(x) = 0$ なら $\forall g(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対して

$$0 = \langle \partial(f)\Delta(x), g(x) \rangle = \langle \Delta(x), \overline{f(x)} g(x) \rangle = \langle \partial(\overline{g(x)})\Delta(x), \overline{f(x)} \rangle = \langle f(x), \partial(g(x))\Delta(x) \rangle$$

です。一方 $\partial(g(x))\Delta(x)$ は調和多項式すべてを渡りますから $f(x) \perp \mathcal{H}$ つまり $f(x) = 0$ です。 ∎

このことから最高次の調和多項式は $\Delta(x)$ の定数倍であることが分かります。特に $\mathrm{gr}_k \mathcal{E} = \mathcal{H}_k = 0$ $(k > n(n-1)/2)$ です。

[自分のための覚書] 今回は力尽きたのでもうこれ以上は用意しないが、次のような話題も興味深い。

[10] やってないけど。

- fake degree の話。要するに $\tau \in \mathfrak{S}_n^\wedge$ に対して

$$p_\tau(q) = \sum_{k=0}^{n(n-1)/2} [\mathcal{H}_k : \tau] q^k$$

が fake degree だがこの多項式に関する記述 (オリジナルには [Steinberg], ただしこれは A 型のみ。一般的にはたとえば [GNS] を参照のこと)。しかしこの話には指標の知識が不可欠である。

- これはちょっとした疑問でもあるが、作用素として

$$\partial(\Delta(x))\Delta(x)$$

は何になるか? もちろん $\Delta(x)$ 自身は掛け算作用素と思っている。 Capelli 恒等式?

- **Conjecture 5.18** $\mathcal{H}$ には対合 T が次のように定義できます。

$$T(f(x)) = (\text{定数倍})\partial(f(x))\Delta(x)$$

この対合は対称群の表現としては符号表現をテンサー積することに相当します。

というのを証明しようとしたが、いまいち証明が思い浮かばない。結果はほぼ正しいと思うが、定数倍については各次数で調節する必要がある。

∎

6　直交群と球面調和関数

古典的な話。できれば reductive dual pair の話もしたい。退化主系列表現との関係。 Howe-Tan, Kostant, Binegar-Zierau

7　リーマン対称空間と半単純リー環の軌道

次の章とあわせて Kostant-Rallis の論文の紹介 (?)

8　軌道上の調和関数

ちょっと専門的すぎるか?

References

[Macdonald1] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials (Second Edition)*. Clarendon Press, Oxford, 1995.

[Macdonald2] I. G. Macdonald, *Notes on Schubert Polynomials*. Publications du LCIM **6**, Université du Québecà Montréal, 1991.

[Steinberg] R. Steinberg, A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field. *Trans. AMS*, **71**(1951), 274 – 282.

[GNS] A. Gyoja, K. Nishiyama and H. Shimura, Invariants for representations of Weyl groups and two-sided cells. Preprint, 1995.

[Helgason] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1984.

Index

一般線型群, 15
岩澤分解, 20

解と係数の関係, 28, 29
カルタン分解, 25
ガロア群, 28
完全対称式, 31
簡約表示, 23

奇置換, 12, 13
軌道和対称式, 28
基本対称式, 28
既約表現, 41
既約分解, 41
極分解, 25

空間群, 3
偶置換, 12, 13
組み紐関係式, 10
グラム-シュミットの直交化, 19
群, 3
群環, 41

繋絡作用素 (intertwining operator), 41

交代式, 32
    最簡—, 32, 34
恒等写像, 7
互換, 9
コクセター群, 10
コクセターの関係式, 10
コセット分解, 7
固定部分群, 7

最簡交代式, 32, 34
差積, 33, 34
作用, 7

次数付き
    —環, 38
    —空間, 38
指標, 17
射影空間, 16
自由群, 10

シューベルト胞体, 23
巡回置換, 10
剰余類分解, 7

推移的
    作用が—, 8

正規化, 19
正規化部分群, 22
生成系, 9
生成元, 9
正則表現, 41
    左—, 41
積, 3

対称群, 6
    n 次対称群, 6
対称式, 27
対称式に関する基本定理, 28
代表元, 7

置換, 9
置換行列, 12
置換群, 9
中心化群, 25
重複度, 41
調和多項式, 34

点群, 3
転倒数, 23

等質空間, 8
等質成分 (isotypic component), 41
同変
    右 B —, 17

長さ, 23

二面体群, 3
ニュートンの公式, 29

旗, 20
旗多様体, 20
働く, 7

左側分解, 7
表現, 27, 38
    テンサー積—, 38
表現空間, 27

ブリュウア分解, 23
ブリュウア胞体, 23

ベキ和対称式, 29

ボレル部分群, 16, 21
ボレル-ヴェイユの定理, 17

ユニタリ行列, 19

リーマン-ロッホの定理, 17

和, 3