極小表現入門

西山 享 (京大総合人間学部)

1998/ 12/14 – 12/18　(Ver. 2.1 (Wed Jan 5 15:05:46 JST 2000))

Contents

このノートは 1998 年度 東大数理での集中講義用に用意したノートに加筆訂正したものである。講義をする機会を与えていただいた松本久義さんに感謝する。また同氏と小林俊行さんからは講義中に有益なコメントをいただいた。このノートでは十分にコメントを生かしきれていないきらいがあるが、いろんな部分が改善されていると思う。両氏と、講義に出席していただいた皆さんに感謝する。

1999 年度の京都大学人間・環境学研究科の講義にもこのノートを使用して、いくつかの改訂を行なった。その際、面田氏より [85] と [86] の文献を紹介していただいた。感謝する。

1 Highest weight variety と極小巾零軌道

Abstract

半単純 Lie 群の有限次元表現については既知とする。復習を兼ねて、最高ウェイト多様体の一般論を Popov-Vinberg にしたがって行なう。この定理を応用して、極小巾零軌道の導入をする。参考図書として [63], [65], [44], [43] をあげておく。証明を気にしなければ、[65] はお薦めの一冊。

1.1 Highest weight variety の一般論

G を半単純連結な代数群 $/\mathbb{C}$ とする。

$V = V_\psi$: G の最高ウェイト ψ の既約有限次元表現 (自明ではないと仮定する)

$v = v_\psi$: 最高ウェイトベクトル

Definition 1.1 $Y = G \cdot v \subset V$ を highest weight variety と呼ぶ。以下 HWV と記す。代数多様体 Y に対して Y 上の正則関数の全体 (つまり global sections の全体) を $\mathcal{R}(Y)$ で表す。また $\mathcal{R}(Y)$ を係数とする Y 上の global な代数的微分作用素の全体を $\mathcal{D}(Y)$ と書く。

Theorem 1.2 (Vinberg-Popov [37], Kostant) (1) Y は V の自明でない最低次元の G 軌道であって、$\overline{Y} = Y \cup \{0\}$ は正規多様体である。また $Y \subset \overline{Y}$ は smooth な部分多様体である。(つまり特異点は原点のみ)

(2) $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}\left(\overline{Y}\right)$

(3) $Y, \overline{Y}$ には G が作用しているので、自然に $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}\left(\overline{Y}\right)$ 上に G の表現が定義される。このとき

$$\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}\left(\overline{Y}\right) \simeq \bigoplus_{m \geq 0} V_{m\psi}^*.$$

Proof. <u>(1) の証明</u> : 次の補題を使う。

Lemma 1.3 射影空間 $\mathbb{P}(V)$ で考えた時に、$G \cdot [v] \subset \mathbb{P}(V)$ は $\mathbb{P}(V)$ のただ一つの最低次元の軌道である。ただし $[v] \in \mathbb{P}(V)$ は最高ウェイトベクトル v の代表する射影空間の点である。

もしこれが示されたとすると、$Y = G \cdot v$ が V の中で最低次元の軌道になることが次のようにしてわかる。まず Y は錐であるから、

$$\dim Y = \dim p(Y) + 1$$

である。ただし自然な射影 $p : V \backslash \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ による Y の像を $p(Y)$ と書いた。

一方他の G 軌道 $\mathcal{O}$ に対しては、明らかに $\dim \mathcal{O} \geq \dim p(\mathcal{O})$ なので、

$$\dim \mathcal{O} \geq \dim p(\mathcal{O}) > \dim p(Y) = \dim Y - 1, \tag{1.1}$$

$$\dim \mathcal{O} + 1 > \dim Y, \qquad \dim \mathcal{O} \geq \dim Y$$

となる。[1]

代数多様体上の代数群の作用に対しては、閉包 $\overline{\mathcal{O}}$ に属する軌道は $\mathcal{O}$ とそれより低次の軌道からなることが一般論により知られている[2]。したがって $\overline{Y}$ に属する可能性のある唯一の軌道はそれより低次の $\{0\}$ のみである。一方 Y は錐なので、明らかに $\{0\}$ は閉包に入っている。

また Y は G 軌道なので明らかに smooth である。(smooth な点は稠密にあり、等質空間なのだから結局すべての点が smooth である。)

以上から上の補題が示せれば (1) の前半 (正規多様体の主張を除いた部分) は証明できたことになる。

以下補題の証明: $V \ni \forall u \neq 0$ をとる。このとき $G \cdot [u]$ の閉包に $[v]$ が属していることが示されれば OK。そうすると閉包に属しているのだから、$G \cdot [u] \neq G \cdot [v]$ なら $\dim G \cdot [v]$ の次元の方が真に小さい。

まず u をウェイト分解する。

$$u = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} u_\lambda$$

このとき $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ であって、正ルート系を定義しているようなものをとる。この H に対して

$$\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid u_\lambda \neq 0\}$$

の中で最大になるようなウェイトを μ とする。そうすると $h_t = \exp(tH)$ と書いて

$$h_t \cdot u = \sum_\lambda h_t^\lambda u_\lambda = h_t^\mu \sum_\lambda h_t^{\lambda-\mu} u_\lambda$$

だから、

$$h_t \cdot [u] = \left[\sum_\lambda h_t^{\lambda-\mu} u_\lambda \right] \longrightarrow [u_\mu] \qquad (t \to \infty)$$

つまり $\overline{G \cdot [u]} \ni [u_\mu]$ である。

さて、単純ルート $\alpha \in \Pi$ をとり、そのルートベクトルを X_α と記す。すると

$$X_\alpha^{m+1} u_\mu = 0, \qquad X_\alpha^m u_\mu \neq 0$$

となるような m に対して $X_\alpha^m u_\mu \in \overline{G \cdot [u_\mu]}$ であることが、$u = \exp X_\alpha \cdot u_\mu$ に直前の議論を応用することによりわかる。

[1] この等号つき不等号は best possible であって、実際に $\dim \mathcal{O} = \dim Y$ となるような最低次元の軌道が他に存在することがある。実際、$SL(2,\mathbb{C})$ の随伴表現を考えると、半単純軌道も巾零軌道もすべて 2 次元 (ゼロ軌道を除けば) である。

[2] これは「任意の軌道が局所閉である」ことから従う。証明は例えば、[64, Lemma 2.3.3] 参照。

これを各単純ルートに対して行なうと、ウェイトはどんどん大きくなるので、いつかは $X_{\alpha_k}^{m_k}\cdots X_{\alpha_1}^{m_1}u_\mu$ の形のベクトルが最高ウェイトベクトルにたどり着く (もしたどり着かなければ最高ウェイトベクトルが二つあることになり矛盾する)。このようにたどっていったものはすべて G 軌道の閉包に含まれるという関係にあるので、最終的に $\overline{G\cdot[u]}\ni[v]$ が結論される。

<u>補題の証明終り</u>

この補題の証明中で明らかになったことをまとめておこう。

Exercise 1.4 次のことを証明せよ。

(1) 軌道 $Y=G\cdot v_\psi$ と同じ次元の軌道があったとしたらそれは錐ではあり得ない。[ヒント：(1.1) 式を参照せよ。]

(2) $v=v_\psi$ の固定部分群を H、$[v_\psi]\in\mathbb{P}(V)$ の固定部分群を Q と書くと、Q は放物型部分群であって、$Q/H\simeq\mathbb{C}^\times$ となる。さらに Q は単純ルート系 Π の中の次の部分集合に対応するような PSG である。

$$Q\longleftrightarrow\{\alpha\in\Pi\mid(\psi,\alpha)=0\}$$

[ヒント：Q が PSG であることは、$G/Q=G\cdot[v]$ が射影多様体であることから従う。もっとも Q が Borel 部分群を含むことは明らかなので、そちらから行ってもよい。H が Q の中で正規部分群になっていることはその定義からほぼ明らかである。Q に対応する単純ルートについては例えば [43, Th. 3.2] を見るとよい。]

(3) 軌道 $Y=G\cdot v_\psi$ の次元は

$$\dim Y=\#\{\alpha\in\Delta^+\mid(\psi,\alpha)\neq0\}+1$$

で与えられる。

さて残りの主張をまとめて示そう。まず、v の固定部分群を H と書くと、$Y=G\cdot v\simeq G/H$ なので[3]

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(Y)&\simeq\mathbb{C}[G/H]=\mathbb{C}[G]^H=\operatorname{ind}_H^G\mathbf{1}_H\\&\overset{\triangle}{=}\sum_{V_\lambda\in\widehat{G}}^{\oplus}\dim(V_\lambda^{*H})\,V_\lambda=\sum_{V_\lambda\in\widehat{G}}^{\oplus}\dim(V_\lambda^H)\,V_\lambda^*\end{aligned}$$

である。等式 $\overset{\triangle}{=}$ は代数群の (代数的な) 誘導表現に関する Frobenius Reciprocity から従う[4]。

そこで $\mathcal{R}(Y)$ を決めるには V_λ^H を決定すればよい。H は Borel の極大巾単部分群を含んでいるから、V_λ^H の元は最高ウェイトベクトルであって、従って一次元以下である。それ

[3] この部分複素だといつも OK だが、代数群のカテゴリーでは若干複雑である。[44, Prop. 6.7] 参照。

[4] G を代数群、H をその閉部分群とする時、$\operatorname{Hom}_G(W,\operatorname{ind}_H^G V)\simeq\operatorname{Hom}_H(W\big|_H,V)$ が成り立つ。この事実はすぐにでも証明できるが、例えば [43, §6] 参照。

が一次元になるためには、$T \cap H$ 上で λ が自明であることが必要にして十分な条件である。$T \cap H$ は ψ のゼロ化部分群であるから Pontryagin 対応[5]によって、そのようなウェイトは

$$\lambda \in \{m\psi \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

とならなければいけないことがわかる。さらに λ は dominant だから $\lambda = m\psi$ $(m \geq 0)$ である。以上から次の G 加群としての分解がわかった。

$$\mathcal{R}(Y) \simeq \sum_{m \geq 0}^{\oplus} V_{m\psi}^{*} \tag{1.2}$$

Exercise 1.5 上の Pontryagin 対応の部分をトーラス T に対して定式化し、それを証明せよ。[ヒント：$T \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^{\times}$ は全射。この準同型を通して、$\mathrm{Ind}_{\ker\psi}^{T} \mathbf{1} \simeq \mathbb{C}[\mathbb{C}^{\times}] = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ となる。これを利用せよ。]

次に $\mathcal{R}\left(\overline{Y}\right)$ について調べよう。$\overline{Y}$ は affine variety なので、制限写像

$$S(V^{*}) \longrightarrow \mathcal{R}\left(\overline{Y}\right)$$

は全射、G-equivariant である。いま m 次斉次成分 $S^{m}(V^{*})$ の最低ウェイトベクトル f をとり、そのウェイトを λ としよう。 Borel 部分群を

$$\begin{cases} B & = & TU & : \text{Borel 部分群} \\ B^{-} & = & TU^{-} & : \text{opposite Borel 部分群} \end{cases}$$

などと書くと、 $u^{-} \in U^{-}$ に対して、f が最低ウェイトベクトルであることから

$$f(v_{\psi}) = (u^{-} f)(v_{\psi}) = f((u^{-})^{-1} v_{\psi})$$

ところが、 $B^{-} v_{\psi} = \mathbb{C}^{\times} U^{-} v_{\psi} \subset \overline{Y}$: 稠密 なので

$$f(v_{\psi}) = 0 \Longleftrightarrow f\big|_{\overline{Y}} = 0$$

が結論される。またトーラスの作用については $\forall t \in T$ に対して

$$\begin{aligned} t^{\lambda} \cdot f(v_{\psi}) &= (t\, f)(v_{\psi}) \quad (f \text{ はウェイトが } \lambda \text{ のウェイトベクトル}) \\ &= f(t^{-1} v_{\psi}) = f(t^{-\psi} v_{\psi}) \\ &= t^{-m\psi} f(v_{\psi}) \quad (f \text{ は斉次 } m \text{ 次式}) \end{aligned}$$

となって、もし $f(v_{\psi}) \neq 0$ なら $\lambda = -m\psi$ でなければならないことがわかる。

さらにこのような条件からウェイト $-m\psi$ の最低ウェイトベクトルは $\overline{Y}$ 上で完全に決まってしまうから、そのようなベクトルの $\mathcal{R}\left(\overline{Y}\right)$ における重複度は 1 以下である。

---

[5]例えば、[45, 第 8 章 §2] を見よ。しかし、代数群の場合には若干の修正が必要である (つまり代数群では代数的な指標しか考えないので)。

この重複度がゼロでないことは次のようにしてわかる。V_ψ^* の最低ウェイトベクトルを $v_\psi^* \neq 0$ と書き、$f = (v_\psi^*)^m \in S^m(V_\psi^*)$ とおく。すると、

$$f(v_\psi) = (\langle v_\psi^*, v_\psi \rangle)^m \neq 0$$

なので[6] $f\big|_{\overline{Y}} \neq 0$ である。さらにこれがウェイト $-m\psi$ の最低ウェイトベクトルであることが容易に確認できる。

以上から次の式がわかった。

$$\mathcal{R}\left(\overline{Y}\right) \simeq \sum_{m \geq 0}^{\oplus} V_{m\psi}^* \tag{1.3}$$

したがって (1.2), (1.3) を比較して、

$$\mathcal{R}\left(\overline{Y}\right) = \mathcal{R}\left(Y\right) \simeq \mathbb{C}[G]^H$$

が結論できる。以上で (2) および (3) が示された。さらに $\mathbb{C}[G]^H$ は整閉なので $\overline{Y}$ は正規多様体である。[7] Q.E.D.

Exercise 1.6 v_ψ を V_ψ の最高ウェイトベクトル、v_ψ^* を V_ψ^* の最低ウェイトベクトルとするとき、$\langle v_\psi^*, v_\psi \rangle \neq 0$ を示せ。

1.2 最高ウェイト多様体の例

いくつか例をあげる。

Example 1.7 V を n 次元ベクトル空間、V^* をその双対空間とする。V^* を $G = GL(V)$ の表現と思うともちろん既約表現であって、その最高ウェイトベクトルは

$$V^* \simeq \mathbb{C}^n \ni e_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。$G \cdot e_1^* = V^* \setminus \{0\}$ だから、$\overline{Y} = V^*$ (全体!) となる。したがって

$$\mathbb{C}[V^*] = \mathbb{C}[\overline{Y}] \simeq \sum_{m \geq 0}^{\oplus} V_{m\Lambda_1}$$

となる。ここに Λ_1 は表現 V の最高ウェイト (1 番目の基本ウェイト)。$S(V) \simeq \mathbb{C}[V^*]$ は対称テンソルの空間と思うことができるので、上の分解から、よく知られた事実として、m 階の対称テンソルの空間 (あるいは m 次斉次式の空間) $S^m(V)$ は $GL(V)$ の表現として既約であって、その最高ウェイトが $m\Lambda_1 = (m, 0, \ldots, 0)$ であることがわかる。

[6] 演習 1.6 を参照

[7] 一般に整閉整域の H 不変元全体はまた整閉である。このことから、正規多様体の代数群による geometric quotient はまた正規であることが従う。

Example 1.8 $2n$ 次の直交群 $G = SO_{2n}(\mathbb{C})$ の自然表現 $V = \mathbb{C}^{2n}$ を考えよう。ただし対称双一次形式を通常のようではなく、次の対称行列 J に関して取ることにする。

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix}$$

すると、最高ウェイトベクトルは

$$V = \mathbb{C}^{2n} \ni e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる (e_1 は null vector であることに注意)。また最高ウェイトは $\Lambda_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ である。最高ウェイト多様体は

$$Y = G \cdot e_1 = \{\text{null vectors } v \in V \mid {}^t vJv = 0\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_i \\ y_j \end{bmatrix} \neq 0 \mid \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \right\}$$

で、null vector の全体となる。特に $\overline{Y}$ は $2n-1$ 次元の超曲面で、V とは異ることに注意。$F = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ とおくと、

$$\mathbb{C}[\overline{Y}] = \mathbb{C}[x_i, y_j]/(F) \simeq \sum_{m \geq 0}^{\oplus} V_{m\Lambda_1}$$

である (最後の式で $V_{m\Lambda_1}^* \simeq V_{m\Lambda_1}$ に注意)。

この式を使ってちょっとした応用を考える。まずポアンカレ級数を考えると

$$\begin{aligned} P(\mathbb{C}[\overline{Y}]; t) &= \frac{1}{(1-t)^{2n}} - \frac{t^2}{(1-t)^{2n}} = \frac{1-t^2}{(1-t)^{2n}} = \frac{1+t}{(1-t)^{2n-1}} \\ &= (1+t) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2n+k}{k} t^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \binom{2n+k}{k} + \binom{2n+k-1}{k-1} \right\} t^k \end{aligned}$$

だから、m 次斉次の部分を比較して、

$$\dim V_{m\Lambda_1} = \binom{2n+k}{k} + \binom{2n+k-1}{k-1}$$

がわかる。もちろんこれは Weyl の次元公式を使っても簡単に計算できる。

Example 1.9 $G = GL_p \times GL_q$ を考え、$p \times q$ 行列の全体 $M_{p,q}$ に次のように作用しているとする。

$$(g, h) \cdot X = gX^t h \quad ((g, h) \in G, X \in M_{p,q})$$

このとき contragredient 表現 $M_{p,q}^* = M_{q,p}$ の最高ウェイトベクトルとして $E_{11} \in M_{q,p}$ が取れる。ただし E_{ij} は (i,j) 成分が 1 で他は全てゼロの行列単位。すると E_{11} を通る軌道は

$$Y = G \cdot E_{11} = \{X \in M_{q,p} \mid \operatorname{rank} X = 1\}$$

となり、最高ウェイト多様体は

$$\overline{Y} = \{X \in M_{q,p} \mid \operatorname{rank} X \le 1\} \quad : \text{determinantal variety}$$

となる。定義方程式は二次小行列式の全体 $\{x_{ij}x_{kl} - x_{il}x_{kj} \mid 1 \le i,k \le q, 1 \le j,l \le p\}$ で与えられる。また正則関数環の分解は次のようになる。

$$\mathbb{C}[\overline{Y}] \simeq \sum_{m \ge 0}^{\oplus} V_{m\Lambda_1}^{(p)} \boxtimes V_{m\Lambda_1}^{(q)}$$

1.3 極小巾零軌道の存在

この定理を G のリー環 $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現に対して適用してみよう。

Theorem 1.10 G を単純代数群 $/\mathbb{C}$ として、$\mathfrak{g}$ をそのリー環 $/\mathbb{C}$ とする。また以下では G の $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現を考える。随伴軌道のことを単に軌道と呼ぶ。

(1) G のゼロでない巾零軌道中最低次元のものがただ一つ存在する。この軌道を $\mathcal{O}_{\min}$ と表し、**極小巾零軌道**と呼ぶ[8]。$\mathcal{O}_{\min}$ は G のゼロを除くすべての軌道の中で最低次元であり、その閉包 $\overline{\mathcal{O}_{\min}} = \mathcal{O}_{\min} \cup \{0\}$ は正規多様体である。

(2) ψ を最高ルートとすると、$\mathcal{O}_{\min}, \overline{\mathcal{O}_{\min}}$ 上の正則関数は一致して、G 加群としての分解が次のように与えられる。

$$\mathcal{R}(\mathcal{O}_{\min}) = \mathcal{R}\left(\overline{\mathcal{O}_{\min}}\right) = \sum_{m \ge 0}^{\oplus} V_{m\psi}$$

ここに V_λ は G の最高ウェイト λ の表現である。

Proof. G は単純なのでその随伴表現は既約であり、随伴表現の最高ウェイトは最高ルートに一致している。つまり最高ウェイトベクトルは X_ψ で、巾零元となっていることに注意せよ。そうするとこの定理のほとんどの主張は、前定理 1.2 より従う。

明らかでない点は、巾零軌道の中でただ一つの最低次元軌道であるという点と、$V_\psi^* \simeq V_\psi$ である点であろう。後者はやさしい。前者については巾零軌道が錐であること (系 3.3) と、演習 1.4 の (1) により従う。 Q.E.D.

Exercise 1.11 $V_\psi^* \simeq V_\psi$ であることを証明せよ。ただし ψ は最高ルートとする。

[8] ここでは最低次元というだけであるが、閉包による包含関係において最小元になる (例えば [46, Th. 4.3.3] 参照)。本来は最小巾零軌道と呼ぶべきであるが、通常極小巾零軌道と呼び慣わす。

Exercise 1.12 $G = SL_2(\mathbb{C})$ を考える。その Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の元に座標を

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}$$

で入れる。この時次を示せ。

(1) X が巾零元 $\iff$ $x^2 + yz = 0$、特に巾零多様体の定義方程式は $x^2 + yz = 0$ である。

(2) $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\mathcal{O}_\lambda = \{X \mid x^2 + yz = \lambda\}$ とおくと、$\mathcal{O}_\lambda$ は $SL_2(\mathbb{C})$ による半単純軌道である。

(3) 射影空間 $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ においては、すべての半単純軌道はただ一つの軌道に射影され、open dense である。もう一つの軌道は巾零軌道を射影したものである。

2 認容表現とその不変量

Abstract

既約認容表現 (π, H) の不変量 (指標、随伴多様体 (随伴サイクル)、Gelfand-Kirillov 次元、Bernstein 次数、$\cdots$) の構成や性質について基本事項の解説を行なう。この章での参考書としては [47], [33] が良いだろう。

この章では、G は 線型な半単純代数群 で 実数上定義されている もの (の実数点全体) とする。実数上の代数群であることを強調したい時には $G_{\mathbb{R}}$ と書くこともある。複素化は $G_{\mathbb{C}}$ で表す。

2.1 認容表現と指標

$(\pi, \mathcal{H})$ を G のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の強連続な表現とする[9]。また $K \subset G$ を極大コンパクト部分群とする。

Example 2.1 (G, K) の例 (古典型):

$$\begin{array}{ll} (SL(n,\mathbb{R}), SO(n)), & (SU(p,q), S(U(p)\times U(q))), \\ (SO_0(p,q), SO(p)\times SO(q)), & (Sp(2n,\mathbb{R}), U(n)) \end{array}$$

Definition 2.2 上の設定の下に

(1) C^∞ ベクトルの空間を次のように定義する。

$$\mathcal{H}^\infty = \{ v \in \mathcal{H} \mid \pi(g)v \ (g \in G) \text{ は } G \text{ 上の } C^\infty \text{ 関数} \}$$

(2) K 有限ベクトルの空間を次のように定義する。

$$\mathcal{H}_K = \{ v \in \mathcal{H} \mid \dim \langle \pi(K)v \rangle / \mathbb{C} < \infty \}$$

(3) $\forall \tau \in \widehat{K}$ に対して τ の $\mathcal{H}$ における重複度 $[\tau{:}\mathcal{H}]$ が有限の時、$(\pi, \mathcal{H})$ を認容表現 (admissible representation) と呼ぶ。

$\mathcal{H}^\infty$ は (位相的には閉じていないが) G 不変な部分空間であり、さらに G のリー環 $\mathfrak{g}$ が微分として作用する。この作用を複素化することにより、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ 加群と思うことにする。

以下 表現といえば特に断らない限り認容表現のみを考える。

Theorem 2.3 $(\pi, \mathcal{H})$ を G の認容表現とする。

[9] 表現空間はヒルベルト空間としないでバナッハ空間や、あるいは Frechét 空間などとした方が応用が効くのだが以下ではどうせ代数的な $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群の話になるので、ここではそれほど拘らないことにする。例えば [62] 参照。

(1) $\mathcal{H}_K \subset \mathcal{H}^\infty$ であって、$\mathcal{H}_K$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$ の作用で不変である。さらに $(\pi, \mathcal{H})$ が $Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 有限なら $\mathcal{H}_K$ は実解析的なベクトルからなる。

(2) $(\pi, \mathcal{H})$ が有限生成であれば (特に $(\pi, \mathcal{H}_K)$ が $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 加群として有限生成であれば)、$(\pi, \mathcal{H})$ の閉部分空間と $(\pi, \mathcal{H}_K)$ の代数的な部分表現は一対一に対応する。従って

$$(\pi, \mathcal{H}) \text{ が既約} \iff (\pi, \mathcal{H}_K) \text{ が既約}$$

Proof. 例えば [47] の Theorems 3.4.10, 3.4.11, 3.4.12 を参照。 Q.E.D.

$(\pi, \mathcal{H})$ は有限の長さを持つ認容表現とし、 $f \in C_0^\infty(G)$ を G 上のコンパクト台の C^∞ 関数とする。このとき

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$$

とおくと $\pi(f)$ は trace class の作用素になるので、その trace をとることができる ([47, Lemma 8.1.1])。

Theorem 2.4 $(\pi, \mathcal{H})$ を有限の長さを持つ認容表現とする。

(1) $f \in C_0^\infty(G) \to \mathrm{trace}\,\pi(f) \in \mathbb{C}$ は G 上の超函数になり、局所可積分であって、 G の半単純正則元の全体 G' 上では実解析的である。この超函数を Θ_π で表し、$(\pi, \mathcal{H})$ の**(大域) 指標** (global character, distribution character) と呼ぶ。

(2) $(\pi, \mathcal{H})$ が既約なら Θ_π は G 上の不変固有超函数になる。

Proof. (1) の証明は略する ([47, Theorem 8.4.1])。G の元 g が正則であるとは、$\{g\}$ の中心化群 $Z_G(g)$ が最小次元になるときに言う。半単純正則元は要するにある Cartan 部分群に含まれていて、ワイル群の元によって固定されないような元のことである。

(2) まず言葉の準備をする。

超函数 Θ が**不変固有超函数**であるというのは、G 不変性を持ち、さらに展開環の中心 $\mathfrak{Z} \subset U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の同時固有超函数になっているときに言う。同時固有値を Θ の**無限小指標**と呼ぶ。無限小指標は $\mathfrak{Z}$ から $\mathbb{C}$ への代数準同型になるが、これを χ で表そう。

$$Z\Theta = \chi(Z)\Theta \quad (Z \in \mathfrak{Z})$$

Harish-Chandra 同型により、代数として $\mathfrak{Z} \simeq U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W$ (Cartan 部分代数の展開環のワイル群不変式) となることが知られているので、この対応により $\chi \leftrightarrow \lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}^*/W$ がワイル群の作用を除いて対応する。この λ も無限小指標と呼んで、 $\chi = \chi_\lambda$ などと書くことがある。

このとき G 不変性は積分の G 不変性と跡の随伴作用に関する不変性から従う。一方 π は既約であるので、中心 $\mathfrak{Z}$ はスカラーで作用する。この作用に対応して π の無限小指標 χ_λ が定まる。Θ_π が固有超函数であることは π の無限小指標が χ_λ であることから従う。Q.E.D.

Theorem 2.5 $(\pi, \mathcal{H})$ 等をすべてヒルベルト空間上の G の認容表現とする。

(1) もし $(\pi_1, \mathcal{H}_1), (\pi_2, \mathcal{H}_2)$ が既約なら

$$\begin{aligned} &(\pi_1, \mathcal{H}_1) \simeq (\pi_2, \mathcal{H}_2) \quad (G \text{ の連続表現として}) \\ &\quad \Longrightarrow \quad (\pi_1, (\mathcal{H}_1)_K) \simeq (\pi_2, (\mathcal{H}_2)_K) \quad ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K) \text{ 加群として、代数的に}) \\ &\quad \Longleftrightarrow \quad \Theta_{\pi_1} = \Theta_{\pi_2} \end{aligned}$$

(2) $(\pi_i, (\mathcal{H}_i)_K)$ $(1 \le i \le k)$ を相異なる既約表現とすると、Θ_{π_i} $(1 \le i \le k)$ は一次独立である。

Proof. 上の定理は指標が $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群の情報だけで決まることを述べている。証明については [47] の Lemmas 8.1.2, 8.1.4 を参照。 Q.E.D.

$(\pi_1, (\mathcal{H}_1)_K) \simeq (\pi_2, (\mathcal{H}_2)_K)$ の時二つの表現は**微分同値**であると呼ばれる。我々は微分同値な表現は区別しないで、以下 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群だけを考えることにする。微分同値な既約表現は指標によって完全に決まることに注意しよう。

2.2 原始イデアルと巾零軌道

以下しばらくの間、完全に代数的な状況を考え、$(\pi, \mathcal{H})$ を単なる代数的な $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 加群としよう。

Definition 2.6 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ のイデアル $\mathcal{I}$ が原始イデアル (primitive ideal) であるとは、ある既約表現 $(\pi, \mathcal{H})$ に対して

$$\mathcal{I} = \ker \pi = \{X \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \mid \pi(X)v = 0 \ (\forall v \in \mathcal{H})\}$$

となる時にいう。

$(\pi, \mathcal{H})$ が既約なら、展開環の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ はスカラーで作用し、中心の一次元表現 $\chi = \chi_\lambda$ が決まる。つまり

$$\ker \chi = \mathcal{I} \cap Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

である。この χ のことも無限小指標と呼ぶ。さらに無限小指標 χ を持つような原始イデアルの集合を $\mathrm{Prim}\,(\chi) = \mathrm{Prim}\,(\lambda)$ と書くことにしよう。

Theorem 2.7 (Duflo) $L(\lambda)$ を最高ウェイトが λ であるような既約最高ウェイト表現、その原始イデアルを $\mathcal{I}_\lambda$ と書くと、

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^* \ni \lambda \to \mathcal{I}_\lambda \in \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

は全射である。特に $\chi \in \mathrm{Hom}_{alg}(Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \mathbb{C})$ を一つ固定すると、$\mathrm{Prim}\,(\chi)$ は有限集合であって、ワイル群の位数を越えない。

原始イデアルに対して巾零軌道を対応させることを考える。展開環の標準次数付を

$$\mathbb{C} = U_0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset U_1(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset U_2(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \cdots \subset U_n(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \cdots$$

とする。両側イデアル $\mathcal{I}$ に対してその次数付を展開環の次数付から誘導されたものとし、その次数化 $\mathrm{gr}\,\mathcal{I}$ を考える。

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{I} \cap U_n(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \quad \mathrm{gr}\,\mathcal{I} = \bigoplus_n \mathcal{I}_n/\mathcal{I}_{n-1}$$

このとき ($\mathrm{gr}\,\mathcal{I}$ のゼロ点) $\subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ を $\mathcal{I}$ の**随伴多様体**と呼ぶ。

Theorem 2.8 (Borho-Brylinskyi, Joseph) 原始イデアル $\mathcal{I}$ に対してその随伴多様体はただ一つの巾零 $\mathrm{Ad}^*(G_{\mathbb{C}})$ 軌道の閉包である。この巾零軌道 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{I}$ に付随する巾零軌道と呼ぶ[10]。

$$\mathrm{Prim}\,U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \ni \mathcal{I} \to \mathcal{O} \in \mathcal{N}^*/\,\mathrm{Ad}^*(G_{\mathbb{C}})$$

Remark 2.9 Barbasch-Vogan の計算により、(結果的に) 任意の巾零軌道は原始イデアルに随伴することが知られている。

Proof. 随伴多様体の既約性は難しい。しかしそれが巾零軌道の有限個の和になることは簡単である。実際展開環の中心 $\mathfrak{Z}$ はスカラーで作用するので、gr を取ることにより、$S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_+^{G_{\mathbb{C}}} \subset \mathrm{Ann}\,(\mathrm{gr}\,\mathcal{I})$ がわかる。ところが Kostant の定理 3.20 により、($S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_+^{G_{\mathbb{C}}}$ のゼロ点) $= \mathcal{N}^*$ である。巾零軌道の個数の有限性も Kostant によって証明されている (系 3.14)。 Q.E.D.

Exercise 2.10 (1) I を $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の両側イデアルとするとき、$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/I$ の次数付けを

$$(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/I)_n = U_n(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) + I \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定義する。このとき

$$\mathrm{gr}\,(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/I) \simeq S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\,\mathrm{gr}\,I$$

であることを示せ。

(2) $\mathrm{gr}\,I$ が素イデアルなら、$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/I$ は整域であることを示せ。$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/I$ が整域であるとき I は **completely prime** と呼ばれる。

逆は一般には成り立たない[11]。一般に I が completely prime なら $\sqrt{\mathrm{gr}\,I}$ は素イデアルである ([67, 6.15 Proposition (ii)])。また $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が A_n 型 (の直和) なら I が completely prime であることと $\mathrm{gr}\,I$ が素イデアルであることは同値になる ([67, 6.15 Proposition (iii)])。

なお I が completely prime であることと $\mathrm{rank}\,I = 1$ ($\mathrm{rank}\,I$: Goldie rank) であることは同値である。

[10] 我々はしばしば余随伴軌道と随伴軌道を混同して用いる。もちろんオリジナルに意味があるのは余随伴軌道の方であるが、扱いやすいのは随伴軌道の方である。また $G_{\mathbb{C}}$ は随伴群に取る。

[11] 反例あり。[67, 6.15 Remark] 参照。

2.3 付随巾零軌道

話を $G = G_{\mathbb{R}}$ の既約認容表現 $(\pi, \mathcal{H})$ に戻そう。$(\pi, \mathcal{H})$ には巾零軌道がいろいろなアプローチで対応づけられる。この節ではその対応のさせ方を見る。

2.3.1 随伴多様体 – 代数的なアプローチ –

$(\pi, \mathcal{H})$ を既約な $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群とする。この表現に対して以下のようにして随伴多様体 (associated variety) を対応させることができる。

まず $\mathcal{H}$ の次数化を考える。$\mathcal{H}$ の K 不変な有限次元部分空間 $\mathcal{H}_0$ をとり、それに展開環の次数付を適用することにより $\mathcal{H}$ の次数付を定義する。

$$\mathcal{H}_n = U_n(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathcal{H}_0, \quad M = \operatorname{gr} \mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n / \mathcal{H}_{n-1}$$

このとき $\mathcal{H}$ は既約なので $\cup_n \mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ であることに注意しておこう。さて、$M = \operatorname{gr} \mathcal{H}$ には展開環の次数化である $A = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ が自然に作用している。そこで可換環の一般論を用いて $\operatorname{gr} \mathcal{H}$ の随伴多様体が定義できる。具体的には

$$\operatorname{Ann} M = \{a \in A \mid a \cdot M = (0)\}$$

として、$\operatorname{Ann} M$ の共通ゼロ点をとる。

$$\mathcal{AV}(\pi, \mathcal{H}) = \mathcal{V}(\operatorname{Ann} M) = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \mid X(\operatorname{Ann} M) = 0\}$$

この定義では最初の有限次元の生成空間 $\mathcal{H}_0$ の取り方、つまり次数付の取り方によるように見えるが、実際には次数付に関係がないことが証明できる。そこで $\mathcal{AV}(\pi, \mathcal{H})$ を既約表現 $(\pi, \mathcal{H})$ の**随伴多様体**と呼ぶ。

Theorem 2.11 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ を Cartan 分解とする。このとき随伴多様体 $\mathcal{AV}(\pi, \mathcal{H})$ は $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*$ の巾零 $\operatorname{Ad}^*(K_{\mathbb{C}})$ 軌道の有限個の和である。さらにそのなかで最大次元の軌道を $\mathcal{O}_i$ $(1 \leq i \leq l)$ とすると、

(1) 随伴多様体は l 個の既約成分 $\overline{\mathcal{O}_i}$ に分解する。

$$\mathcal{AV}(\pi, \mathcal{H}) = \bigcup_{i=1}^{l} \overline{\mathcal{O}_i}$$

(2) $\mathcal{O}$ を既約表現 π の原始イデアル $\mathcal{I}_\pi$ に対応する巾零 $\operatorname{Ad}^*(G_{\mathbb{C}})$ 軌道とすれば、各成分 $\mathcal{O}_i$ は $\mathcal{O} \cap \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*$ の既約成分になる。

$$\operatorname{Ad}^*(G_{\mathbb{C}})\mathcal{O}_i = \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} \cap \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^* \supset \mathcal{O}_i \quad (1 \leq i \leq l)$$

Remark 2.12 一般に巾零 $\operatorname{Ad}^*(G_{\mathbb{C}})$ 軌道と $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*$ との交わりは**同次元**の $\operatorname{Ad}^*(K_{\mathbb{C}})$ 軌道の和であることが知られている。

PROOF. 随伴多様体が有限個の巾零軌道の和になることはやさしい。実際、我々の次数付けは K 不変に取ったから $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ はその次数化 $\mathrm{gr}\,\mathcal{H}$ に自明に働く。したがって随伴多様体は $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*$ に含まれる。

また中心の作用は無限小指標倍されるだけなのでこちらも $\mathrm{gr}\,\mathcal{H}$ 上自明に働き、結局随伴多様体は巾零元からなる (定理 3.20 参照)。また $K_{\mathbb{C}}$ の軌道の和になることは $\mathrm{gr}\,\mathcal{H}$ が $K_{\mathbb{C}}$ の作用を持つことから従う。 Q.E.D.

Exercise 2.13 Killing 形式により $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^* \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ とみなすとき、$(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^\perp = \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}^*$ であることを示せ。

Example 2.14 $SL_2(\mathbb{R})$ の例。このときは $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ は対称行列全体であって、そのうち巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道は $\{0\}, \mathcal{X}^\pm$ の三つである。ただし $\mathcal{X}^\pm$ はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & i \\ i & \mp 1 \end{bmatrix}$$

を通る巾零軌道である。

(1) 有限次元表現の随伴多様体は $\{0\}$ である。

(2) 主系列表現の随伴多様体は $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}}$ 全体 $= \{0\} \cup \mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-$

(3) 離散系列表現の随伴多様体は $\overline{\mathcal{X}^\pm} = \{0\} \cup \mathcal{X}^\pm$

この定理より

$$\sqrt{\mathrm{Ann}\,M} = \bigcap \mathfrak{P}_i \quad (\mathfrak{P}_i : \overline{\mathcal{O}_i} \text{ の定義素イデアル})$$

となって、これが $\sqrt{\mathrm{Ann}\,M}$ の素イデアル分解を与えていることがわかる。一般的に A 加群 M の随伴素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して、$\mathfrak{P}$ の M における環論的な重複度 $m(\mathfrak{P}, M)$ を次のように定義する (例えば [51] 参照)。

$$m(\mathfrak{P}, M) = \mathrm{length}_{A_{\mathfrak{P}}} M_{\mathfrak{P}}$$

ただし $A_{\mathfrak{P}}, M_{\mathfrak{P}}$ はそれぞれ $\mathfrak{P}$ における局所化を表し、length は $M_{\mathfrak{P}}$ が $A_{\mathfrak{P}}$ のアルティン加群となるのでその長さを表す。あるいはこの重複度は次のように定義しても良い。M には A 加群としてのフィルター付 $\{M^j\}_j$ であって、

$$M^j/M^{j-1} \simeq A/\mathfrak{Q}_j \quad (\mathfrak{Q}_j \text{ は素イデアルで、} \mathrm{Ann}\,M \subset \mathfrak{Q}_j) \tag{2.1}$$

となるようなものが取れる。このとき、もし $\mathfrak{P}$ が M の極小随伴素イデアルなら

$$m(\mathfrak{P}, M) = \#\{j \mid M^j/M^{j-1} \simeq A/\mathfrak{P}\}$$

はフィルター付の取り方によらず、先に述べた重複度と一致する[12]。

[12] この部分は関数解析セミナー (1999/6/8) で解説した手書きのノートあり。付録としてまとめるのがよいだろう。

Definition 2.15 既約認容表現 $(\pi, \mathcal{H})$ の**随伴サイクル** (associated cycle) を

$$\mathcal{AC}\,(\pi, \mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{l} m(\mathfrak{P}_i, M)[\overline{\mathcal{O}_i}]$$

で定義する。

2.3.2 Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数

以下 Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数の定義をして、随伴多様体との関連について述べる。まず次数つき加群 $M = \oplus_n M_n$ のポアンカレ級数を

$$P(M;t) = \sum_{n \geq 0} \dim M_n \, t^n$$

で決める。ヒルベルト多項式の理論より、

$$P(M;t) = \frac{Q(t)}{(1-t)^d} \quad (Q(t) \text{ は多項式で、 } Q(1) \neq 0\ )$$

となることがわかっている (証明も比較的簡単、[51] 参照)。このとき $c = Q(1)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \dim M_n &= \frac{c}{(d-1)!} n^{d-1} + O(n^{d-2}) \quad (n \gg 0), \qquad \text{または} \\ \sum_{i=0}^{n} \dim M_i &= \frac{c}{d!} n^d + O(n^{d-1}) \quad (n \gg 0) \end{aligned}$$

はそれぞれ十分大なる n について n の多項式になる。また $c \geq 1, d \geq 0$ は整数になることがわかっている。

Definition 2.16 $(\pi, \mathcal{H})$ を既約 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群とする。$M = \operatorname{gr} \mathcal{H}$ を標準的な次数化とする時、整数 c, d はこの次数化の取り方によらない。d を $\mathcal{H}$ の **Gelfand-Kirillov 次元**と呼び、$d = \operatorname{Dim} \mathcal{H}$ と表す。また c を $\mathcal{H}$ の **Bernstein 次数**と呼んで $c = \operatorname{Deg} \mathcal{H}$ で表す。

Remark 2.17 以下の議論を見ればわかるように、 Gelfand-Kirillov 次元は表現がある種の空間上の関数として実現された時の空間の次元 (関数次元ともいう)、 Bernstein 次数は関数が取る値のベクトル空間の次元をだいたい表している。しかし現実にはいろいろな障害が発生し、このままの解釈では成り立たないことが多い。

射影多様体の関数環には自然に次数付が入っているが、その次数付を使って Gelfand-Kirillov 次元や Bernstein 次数に相当する環論的な次元、次数が定義される ([78])。そこで巾零軌道 $\mathcal{O}$ に対して $\overline{\mathcal{O}}$ の次元、次数を $\dim \mathcal{O}, \deg \overline{\mathcal{O}}$ と表すことにする。

Theorem 2.18 $(\pi, \mathcal{H})$ を既約認容表現とし、その随伴サイクルを

$$\mathcal{AC}\,(\pi, \mathcal{H}) = \sum_{i=1}^{l} m_i [\overline{\mathcal{O}_i}]$$

と書いておく。また対応する原始イデアルの定める巾零 $\mathrm{Ad}^*(G_{\mathbb{C}})$ 軌道を $\mathcal{O}_\pi$ と書く。

(1) 随伴多様体の次元は Gelfand-Kirillov 次元と一致する。つまり

$$\mathrm{Dim}\,\pi = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_i = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_\pi \qquad (1 \le \forall i \le l)$$

(2) 随伴サイクルと Bernstein 次数の間には次の関係が成り立つ。

$$\mathrm{Deg}\,\pi = \sum_{i=1}^{l} m_i \deg \overline{\mathcal{O}_i}$$

Proof. (1) についてはいったい誰が最初に証明したのか良く知らない。

(2) は谷口による。証明はそれほど難しくない。次のようにすればよい。M の A 加群としてのフィルター付を(2.1) のように取る。するとフィルターの取り方より、

$$\begin{aligned} P(M;t) &= \sum_j P(M^j/M^{j-1};t) \\ &= \sum_j P(A/\mathfrak{Q}_j;t) t^{s_j} \quad (t^{s_j} \text{ は次数のシフトで発生する}) \\ &= \sum_j t^{s_j} \frac{Q_j(t)}{(1-t)^{d_j}} \end{aligned}$$

だが、両辺に $(1-t)^d$ を掛けて、$t \to 1$ の極限を取れば (あるいは $t = 1$ を代入すれば)、$d_j < d$ であるような項は全て消え、しかも $d = d_j$ であるような項は $\mathfrak{Q}_j$ が随伴多様体の既約成分の定義イデアルである場合に限られる。その場合 $Q_j(1) = \deg \overline{\mathcal{O}_i}$ ($\overline{\mathcal{O}_i}$ は随伴素イデアル $\mathfrak{Q}_j$ が定義する既約成分) であることに注意しよう。各既約成分の重複度は、その定義イデアルがフィルター付の部分商として何回出現するかで決まっているので、各既約成分につきその重複度分だけの和が出て、求める公式を得る。 Q.E.D.

2.3.3 漸近台、波面集合と Rossmann の定理

随伴多様体では実 Lie 群の表現にその Lie 環の複素化の中の巾零軌道を対応させることになる。この対応はある意味で分かりやすいが、実 Lie 群の表現は実 Lie 環上の随伴軌道に対応するはずであるという思想からは少し離れてしまう。そこでここでは Barbasch-Vogan による漸近台 (asymptotic support) を使った表現から巾零軌道への対応について述べておく。

Lemma 2.19 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を指数写像とし、$\mathfrak{g}$ の原点の十分小さな近傍 Ω で、指数写像が Ω 上で微分同相になっているようなものを取る。これによって G の単位元の近傍の局所座標を定義するとき、G の左不変な Haar 測度 dg は局所的に

$$dg = \left| \det \left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X} \right) \right| \; dX \quad (dX \text{ は } \mathfrak{g} \text{ 上のルベーグ測度})$$

と表される。特に G が半単純なら[13]

$$dg = \left|\det\left(\frac{e^{\mathrm{ad}\,X/2} - e^{-\,\mathrm{ad}\,X/2}}{\mathrm{ad}\,X}\right)\right|\;dX$$

とも書ける。

Proof. 前半部分については [50, Th. 1.7] を見られたい。後半部分については G が半単純なら $\det e^{\mathrm{ad}\,X} = 1$ であることから従う。 Q.E.D.

Exercise 2.20 G が半単純なら $\det e^{\mathrm{ad}\,X} = 1 \quad (\forall X \in \mathfrak{g})$ であることを証明せよ。(ルート空間分解を使うとよい。また半単純元の全体は $\mathfrak{g}$ で稠密であることにも注意せよ。)

$X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に対して、

$$\xi(X) = \sqrt{\det\left(\frac{e^{\mathrm{ad}\,X/2} - e^{-\,\mathrm{ad}\,X/2}}{\mathrm{ad}\,X}\right)}$$

とおく。この表示からは明らかではないが、$\xi(X)$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上で定義された一価整関数になる([58, p. 377])。理由は比較的簡単で、軌道積分を用いて

$$\xi(x) = \int_{\Omega_\rho} e^{i\langle\xi,x\rangle}\mu_{\Omega_\rho}(d\xi)$$

と書けることによる。ここで $\Omega_\rho = G^{\mathrm{cpt}}\cdot\rho$ は $\mathrm{Ad}\,G_{\mathbb{C}}$ のコンパクト実形 G^{cpt} によるルートの和の半分 ρ の随伴軌道、μ_{Ω_ρ} は軌道 Ω_ρ 上の標準的な symplectic measure を表す。この表示より、$\xi(x)$ は整関数になることが分かる。

さて、Θ を G 上の不変固有超函数とする。実際には $\Theta = \Theta_\pi$ として、ある既約認容表現の大域指標を考えることになる。$\mathfrak{g}$ 上の超函数 θ を

$$\theta(X) = \xi(X)\Theta(\exp X)$$

と定義しよう。このとき明らかに $\theta(X)$ は $\mathfrak{g}$ 上の不変固有超函数になる。ただし固有超函数は定係数の不変微分作用素 $J = S(\mathfrak{g})^G$ の作用に関するものである。

一般に $\mathfrak{g}$ 上の (原点の近傍に台を持つ) 関数 $f(X)$ に対して G 上の関数 $\tilde{f}(g)$ を

$$\tilde{f}(\exp X) = \xi(X)^{-1}f(X)$$

と定義する。すると

$$\begin{aligned}
\Theta(\tilde{f}) &= \int_G \Theta(g)\tilde{f}(g)dg \\
&= \int_{\mathfrak{g}} \Theta(\exp X)\tilde{f}(\exp X)\xi(X)^2 dX \\
&= \int_{\mathfrak{g}} \xi(X)\Theta(\exp X)f(X)dX \\
&= \int_{\mathfrak{g}} \theta(X)f(X)dX = \theta(f)
\end{aligned}$$

[13] 別に reductive でもよい。

となることに注意せよ。このことから $\theta(X)$ が不変固有超函数になることは容易に見て取れる。

Theorem 2.21 上の設定の下に、θ は次の漸近展開を持つ。$f_t(X) = t^{-\dim \mathfrak{g}} f(t^{-1}X)$ とするとき、

$$\theta(f_t) \sim \sum_{i=-r}^{\infty} t^i D_i(f) \quad (t \downarrow 0) \tag{2.2}$$

ここに D_i は i 次斉次、緩増加な不変超函数であって、その Fourier 変換は

$$\operatorname{supp} \mathcal{F} D_i \subset \mathcal{N} \subset \mathfrak{g}^*$$

を満たす。

Proof. 証明は [55] を見よ。以下では言葉の定義と証明の概略を述べる。

まず漸近展開の意味だが、ある原点のコンパクト近傍を取ると、そこに台を持つ任意の関数 $f(X)$ に対し

$$|\theta(f_t) - \sum_{i=-r}^{N} t^i D_i(f)| \leq \exists C \cdot \sup_{X, |\alpha| \leq \exists k} |D^\alpha f(X)| \cdot t^{N+1}$$

が成り立つことを意味している。ここに D^α は X に関する α 階の偏微分を意味する (α は多重指数)。漸近展開の可能性についてはほぼ明らかである。このとき Θ の具体的な表示式 (Harish-Chandra による) から $r \leq \#\Delta^+$ であることに注意しておこう。

このような漸近展開は存在すれば一意的であり、その一意性から D_i が G 不変であることが分かる。斉次性は $D_i(f_t) = t^i D_i(f)$ を意味するが、これも漸近展開の一意性より従う。緩増加であることはこの定理の最大の問題点であるが、D_i の斉次性からの帰結である。ここでは証明しない。

また $p \in J$ を斉次多項式とし Θ の無限小指標を χ と書くと、やはり展開の一意性から

$$\partial(p) D_i = \chi(p) D_{i-\deg p} \qquad (p \in J = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^{G_{\mathbb{C}}}\text{: homogeneous})$$

となる。次数がずれていることに注意せよ。したがって $\deg p \geq 1$ なら、 $\partial(p^m) D_i = 0$ が十分大きな m に対して成立する。これを Fourier 変換することにより、$\operatorname{supp} \mathcal{F} D_i \subset \mathcal{N}$ が結論される。 Q.E.D.

Remark 2.22 $D = \dim \mathfrak{g}$ とすると、

$$\begin{aligned}\theta(f_t) &= \int_{\mathfrak{g}} \theta(X) t^{-D} f(t^{-1}X) dX \quad (x = X/t) \\ &= \int_{\mathfrak{g}} \theta(tx) f(x) dx\end{aligned}$$

なので、上の漸近展開(2.2) は θ の斉次部分への分解に当たる。

Definition 2.23 上の設定の元に

$$\mathcal{AS}(\Theta) = \bigcup_{i=-r}^{\infty} \operatorname{supp} \mathcal{F} D_i$$

と書き、Θ の**漸近台** (asymptotic support) と呼ぶ。漸近台は有限個の巾零 G 軌道の和であり、定義から明らかに閉集合である (巾零軌道は有限個しかないことに注意せよ)。また $\Theta = \Theta_\pi$ が表現 π の指標の時には $\mathcal{AS}(\Theta_\pi) = \mathcal{AS}(\pi)$ と書いて、 π の漸近台とも呼ぶ。

Theorem 2.24 (Barbash-Vogan) 既約認容表現 π をとり、その原始イデアルを $\mathcal{I}_\pi$、$\mathcal{I}_\pi$ に付随する随伴巾零 $G_\mathbb{C}$ 軌道を $\mathcal{O}_\pi$ と書く。π の大域指標を $\Theta = \Theta_\pi$ として、その漸近展開、漸近台などを上のように定める。

(1) $\mathcal{AS}(\pi) \subset \overline{\mathcal{O}_\pi} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ が成り立つ。

(2) $d = \operatorname{Dim} \pi$ を Gelfand-Kirillov 次元とすると、

$$\dim_\mathbb{R} \mathcal{AS}(\pi) = \dim_\mathbb{R} \mathcal{O}_\pi \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R} = \dim_\mathbb{C} \mathcal{O}_\pi = \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/\mathcal{I}_\pi = 2d$$

が成り立つ。このとき漸近展開 (2.2) における最低次の (ゼロでない) 項の次数は $-r = -\operatorname{Dim} \pi$ に一致する。

(3) 漸近展開の最低次の項を $t^{-d} D_{-d}$ と書くと、 Fourier 変換 $\mathcal{F} D_{-d}$ は次元が $2d$ の実巾零軌道上の不変測度 $\mu_\mathcal{O}$ たちの一次結合である。

Proof. (1) は比較的簡単である。$u \in \mathcal{I}_\pi$ とすると、$\Theta_\pi(u \cdot f) = 0$ であることからほぼ従う。u を次数に分け、その最高次の項のみを考えて、あとは漸近展開の一意性を用いればよい。

(2) は少し難しいのでパス。(2) が言えると (3) は一般論より従う。

詳しくは [55, Th. 4.1] 参照のこと。 Q.E.D.

さて漸近台のほかに、指標 Θ_π には波面集合と呼ばれる不変量が Howe によって定義されている。

Definition 2.25 Θ をある開集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ 上定義された超函数とする。このとき Θ の波面集合 (wave front set) $\mathcal{WF}(\Theta) \subset X \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ とは次の条件を満たす点 (x_0, ξ_0) を <u>除いた</u> 部分集合のことである。

- x_0 の近傍 U と ξ_0 の近傍 V が存在して、$\forall \varphi \in C_c^\infty(U), \forall N > 0$ に対して

$$\mathcal{F} \varphi \Theta(t\xi) = O(t^{-N}) \quad (t \to \infty)$$

  が $\xi \in V$ に対して一様に成り立つ。

一般に Lie 群 G 上の超函数に対しては局所座標をとって考える。すると $\mathcal{WF}(\Theta) \subset T^*G \backslash G$ (G はゼロ切断と同一視する) が定義される。

Remark 2.26 波面集合の解析的な性質については、例えば [57, § 1.3] を参照のこと。

Theorem 2.27 (Howe) G を半単純 Lie 群で π を既約 (ユニタリ) 表現とする。このとき $\mathcal{WF}(\Theta_\pi)$ は単位元 $e \in G$ のファイバー $T_e^*G \simeq \mathfrak{g}^*$ 上で決まり、それを $\mathcal{WF}_0(\pi) \subset \mathfrak{g}^*$ と書くと、$\mathcal{WF}_0(\pi)$ は巾零軌道の和になる。

Proof. [56] 参照。 Q.E.D.

漸近台と波面集合の間に包含関係が成り立つことは早くから分かっていたが、この二つの不変量が一致するかどうかは長い間未解決のままであった。最近 Rossmann によってようやくこの問題に終止符が打たれた。ここでは結果だけを記すにとどめる。

Theorem 2.28 (Rossmann) G を半単純 Lie 群で π を既約認容表現とする。

(1) $\mathcal{AS}(\pi) \subset \mathcal{WF}_0(\pi)$ が成り立つ。

(2) π によって決まる coherent family を π_λ と書くと、$\mathcal{WF}_0(\pi_\lambda) = \mathcal{AS}(\pi_\lambda)$ が一般の λ に対して成り立つ。さらに $\mathcal{WF}_0(\pi_\lambda)$ は一般の λ の取り方に依らない。

Proof. [59] の Theorem 3.5 と Remark 2.4.7 を参照のこと。 Q.E.D.

3　巾零多様体と表現論

しばらくの間複素線形代数群 $G_{\mathbb{C}}$ を扱うことにする。その Lie 環を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と書く。また $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の巾零元全体を $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$、巾零軌道の全体を $\mathcal{N} / \operatorname{Ad} G_{\mathbb{C}}$ などと書くことにする。

3.1　$\mathfrak{sl}_2$-triple の理論

巾零元の性質を導くのに次の Jacobson-Morozov の定理は基本的である。

Theorem 3.1 (Jacobson-Morozov) $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を (ゼロでない) 巾零元とする。このとき、三つ組み $\exists\{y, h, x\}$ が存在して次の関係式を満たす。

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y$$

つまり線型空間 $\mathbb{C}y + \mathbb{C}h + \mathbb{C}x$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と同型な部分代数になる。このとき h を neutral 元、x を nilpositive 元、y を nilnegative 元と呼ぶ。またこの三つ組みを総称して $\mathfrak{sl}_2$-triple と呼ぶ。

Proof.　有名な定理なので証明は略する。例えば、[46], [61, § III.11 Th. 17] などを参照されたい。 Q.E.D.

Exercise 3.2 $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{y, h, x\}$ に対して、h は半単純、x, y は巾零であることを示せ。

この定理からの帰結は豊富である。

Corollary 3.3 $x \in \mathcal{N}$ に対して $\mathbb{C}^{\times} x \subset \mathcal{O}_x = \operatorname{Ad} G_{\mathbb{C}} \cdot x$ が成り立つ。特に巾零軌道は錐であって、その閉包はゼロを含む。

Corollary 3.4 $x \in \mathcal{N}$ に対して $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の次数付

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$$

であって、$\mathfrak{g}_2 \ni x$ となるものが存在する。

Corollary 3.5 x を巾零元とすると、ある Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ が存在して、適当な正ルート系 $\Delta^+ = \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ をとると

$$x = \sum_{\alpha \in \Delta^+} c_\alpha X_\alpha \quad (c_\alpha \in \mathbb{C})$$

と書ける。ただし X_α はルート α に対応するルートベクトルである。

Exercise 3.6 Jacobson-Morozov の定理を用いて、上の 3 つの系を証明せよ。

巾零元の分類には Kostant と Mal'cev による次の二つの定理が基本的である。

Theorem 3.7 (Kostant) 二つの $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{y,h,x\}$ と $\{y',h',x'\}$ が随伴同値であるための必用十分条件は、二つの nilpositive な元 x,x' が随伴同値であることである。つまり次の全単射が成り立つ。

$$\{\mathfrak{sl}_2\text{-triple}\}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$$

Proof. $x = x'$ として一般性を失わない。この時二つの $\mathfrak{sl}_2$-tripleが随伴同値であることを示そう。

まず $[x, h-h'] = 0$ であることに注意しよう。これは $\mathfrak{sl}_2 = \langle y, h, x\rangle$ とおくとき、$h-h'$ が $\mathfrak{sl}_2$ の最高ウェイトベクトル (の一次結合) であることを示している。また

$$h - h' = [x, y-y'] \in [x, \mathfrak{g}]$$

でもある。これは $h-h'$ に $\mathfrak{sl}_2$ の自明な表現の成分がないことを意味する。以上から、$\operatorname{ad}h$ に関する固有空間分解を $\mathfrak{g} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ とするとき、

$$\mathfrak{u}^x = \sum_{i\geq 1} \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}^x = \sum_{i\geq 1} \mathfrak{g}_i^x \quad (\text{ただし } \mathfrak{g}^x \text{ は } x \text{ の固定化部分代数})$$

とおくと $h - h' \in \mathfrak{u}^x$ であることがわかる。

Lemma 3.8 上の設定の下に $h + \mathfrak{u}^x = (\exp\mathfrak{u}^x)h$ が成り立つ。したがって、特に $h - h' \in [x, \mathfrak{g}]$ に対して $[x, h-h'] = 0$ が成り立てば、$\exists g \in G^x$ が存在して $\operatorname{Ad}(g)h = h'$ となる。

Proof. $\forall z \in \mathfrak{u}^x$ に対して $(\exp\mathfrak{u}^x)(h+z) \subset h + \mathfrak{u}^x$ は Zariski open であることを示そう。実際 $\mathfrak{u}^x$ の中で $h+z$ と可換なものはゼロのみであることが次のようにして分かる。$z' \in \mathfrak{u}^x$ に対して

$$[h+z, z'] = [h, z'] + [z, z'] = 0$$

だが、z, z' などを $\operatorname{ad}h$ の固有値に分解して考えると、$[z, z']$ には z' の最低次の次数より大きい次数しか現れない。一方 $[h, z']$ には最低次の次数と同じ項が整数倍 (固有値倍 $\neq 0$) されて現れる。ところがこれがゼロだから、z' は最低次の項を持たない、すなわちゼロである。

以上から、$\dim(\exp\mathfrak{u}^x)(h+z) = \dim\mathfrak{u}^x = \dim(h+\mathfrak{u}^x)$ だが、$\exp\mathfrak{u}^x$ は巾零群で明らかに代数群だから、$(\exp\mathfrak{u}^x)(h+z)$ はザリスキ開集合である。

二つのザリスキ開集合は必ず交わるから、$(\exp\mathfrak{u}^x)(h+z) \cap (\exp\mathfrak{u}^x)(h+z') \neq \emptyset$ だが、二つの軌道が交わるので、それは同じ軌道を定める。したがって $h + \mathfrak{u}^x$ はただ一つの軌道からなる。 Q.E.D.

この補題から、$h = h'$ として良いことが分かった。ところがこのとき $y = y'$ となる。実際 $[x, y-y'] = h - h = 0$ より $y - y'$ は $\mathfrak{sl}_2$ に関して最高ウェイトベクトルの一次結合であるが、$[h, y-y'] = -2(y-y')$ よりそのウェイトは -2 である。しかしこれはゼロ以外ではあり得ない。 Q.E.D.

以上で定理は証明されたが、証明の最後の部分を補題にまとめておこう。

Lemma 3.9 $\mathfrak{sl}_2$-tripleにおいて、二つの元が決まれば残りの一つはただ一通りに決まる。

Theorem 3.10 (Mal'cev) 二つの $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{y, h, x\}$ と $\{y', h', x'\}$ に対して、二つの neutral 元 h, h' が随伴同値ならば $\mathfrak{sl}_2$-triple も随伴同値である。つまり次の写像は単射である。

$$\{\mathfrak{sl}_2\text{-triple}\}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の半単純元 }\}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}}$$

Proof. $h = h'$ としてよい。この時二つの $\mathfrak{sl}_2$-tripleが随伴同値であることを示そう。

そこで $\operatorname{ad} h$ に関する固有空間分解を $\mathfrak{g} = \sum_i \mathfrak{g}_i$ としておく。G^h を h の中心化群とすると、これは連結で reductive な代数群になる[14]。また明らかにその Lie 環は $\mathfrak{g}_0$ に等しい。このとき次の補題を示そう。

Lemma 3.11 $\operatorname{Ad}(G^h)x \subset \mathfrak{g}_2$ はザリスキ開集合である。特に、$\mathfrak{g}_2$ は G^h-概均質ベクトル空間になる。

Proof. まず $x \in \mathfrak{g}_2$ なので $\operatorname{Ad}(G^h)x \subset \mathfrak{g}_2$ は明らか。あとは次元を比較すればよい。実際 $[\mathfrak{g}_0, x]$ が $\operatorname{Ad}(G^h)x$ の接空間と同一視できるから、

$$\dim \operatorname{Ad}(G^h)x = \dim[\mathfrak{g}_0, x] = \dim \mathfrak{g}_2$$

である。最後の等式は $\mathfrak{sl}_2$ の簡単な表現論から分かる。したがって次元が等しいので $\operatorname{Ad}(G^h)x$ は $\mathfrak{g}_2$ でザリスキ開集合になる。 Q.E.D.

さて、ザリスキ開集合は必ず交わるので、x, x' に上の補題を適用すると $\operatorname{Ad}(G^h)x \cap \operatorname{Ad}(G^h)x' \neq \emptyset$ となり、共通部分を含むからこの二つの軌道は一致する。したがって $x = x'$ としてよい。あとは補題 3.9 を使えば、$y = y'$ が分かる。 Q.E.D.

この二つの定理によって、次の単射が得られる。

$$\mathcal{N}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}} \to \{\mathfrak{sl}_2\text{-triple}\}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}} \cup \{0\} \hookrightarrow \{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ の半単純元 }\}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}/W$$

ただし $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ は Cartan 部分代数であって、W は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ のワイル群である。また $\{0\}$ に対しては便宜的に $\{0\}$ を対応させておく。この写像の像に属する半単純元を distinguished element と呼ぶ。

$h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ を distinguished として、h を正の Weyl chamber に含むような正ルート系を一つ固定する。すると、$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の簡単な表現論によって、単純ルート α に対しては

$$\alpha(h) = 0, 1, 2$$

でなければならないことが分かる。一方 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の元は単純ルートの値を指定すれば一意に決まってしまうから、結局

$$\{\text{distiguished な半単純元 }\}/\operatorname{Ad}G_{\mathbb{C}} \to \{0, 1, 2\}^{\text{単純ルート}}$$

[14] しかしどちらも以下の証明では必要がない。連結性が分からなければ、その連結成分を取って以下同じ議論を適用すればよい。

は単射である。したがって上の写像をすべて合成すれば巾零軌道を次のような離散直積集合に埋め込むことができる。

$$\mathcal{N}/\operatorname{Ad} G_{\mathbb{C}} \to \{0,1,2\}^l \quad (l = \dim \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \operatorname{rank} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

この写像はもちろん単射であるというだけで全射ではない。

Exercise 3.12 $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{y,h,x\}$ と単純ルート系 $\Pi = \{\alpha_i\}$ を上のように取る。このとき $\alpha_i(h) = 0,1,2$ であることを証明せよ。

Definition 3.13 上の写像によって巾零軌道 $\mathcal{O}_x$ が決める単純ルートのラベルづけを**重み付きディンキン図形** (weighted Dynkin diagram) と呼ぶ。これをディンキン図形の各頂点 (= 単純ルート) に $0,1,2$ の数字を書き込むことによって表現する。

ラベル付がすべて 0 または 2 で行われるとき、その軌道を**偶巾零軌道** (even nilpotent orbit) と呼ぶ。

Corollary 3.14 巾零軌道は有限個しかない。その個数の上限は $3^{\operatorname{rank} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ で与えられる。

Example 3.15 A 型の巾零軌道 (ジョルダン標準形) と重み付きディンキン図形:

A_n 型の Lie 代数における巾零元はジョルダン標準形の理論から

$$X = \operatorname{diag}(J(k_1), \cdots, J(k_l))$$

と $\operatorname{Ad} G_{\mathbb{C}}$ で共役である。ただし $J(k)$ はサイズが $k+1$ のジョルダン細胞である。

$$J(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \updownarrow k+1$$

このとき $h(k)$ を

$$\begin{aligned} &h(k) = \operatorname{diag}(k, k-2, \cdots, 2-k, -k) \quad (\text{サイズ } k+1) \\ &H = \operatorname{diag}(h(k_1), \cdots, h(k_l)) \end{aligned}$$

とおくと、$\{\exists Y, H, X\}$ が $\mathfrak{sl}_2$-triple になる。さらに H の対角成分を大きい順に並べ替えたものを

$$H' = \operatorname{diag}(h'_1, h'_2, \cdots, h'_n) \quad (h'_1 \geq h'_2 \geq \cdots \geq h'_n)$$

と書くと X のラベル付は、

$$\alpha_i(H') = h'_i - h'_{i+1}$$

で行われる。とくに X が偶巾零軌道であるための必用十分条件は $k_1, k_2, \cdots, k_l$ の偶奇が一致することである。もちろんこれはジョルダン細胞のサイズの偶奇が一致することと同じである。

Exercise 3.16 上の設定において $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{Y, H, X\}$ のうち Y を具体的に一つ求めよ。このとき Y の自由度はどれくらいあるだろうか?

Example 3.17 極小巾零軌道 $\mathcal{O}_{\min}$ の weighted Dynkin diagram は次のように与えられる。([46] よりの引用)

$$
\begin{array}{ll}
A_n & 1\text{—}0\text{—}\cdots\text{—}0\text{—}1 \\[1ex]
B_n & 0\text{—}1\text{—}0\text{—}\cdots\text{—}0 \Rightarrow 0 \\[1ex]
C_n & 1\text{—}0\text{—}\cdots\text{—}0 \Leftarrow 0 \\[1ex]
D_n & 0\text{—}1\text{—}0\text{—}\cdots\text{—}0 < \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\[1ex]
E_6 & \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\[1ex]
E_7 & \begin{array}{cccccc} & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\[1ex]
E_8 & \begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\[1ex]
F_4 & 1\text{—}0 \Rightarrow 0\text{—}0 \\[1ex]
G_2 & 1 \equiv > 0
\end{array}
$$

[(注) 最高ルートを ψ とすると、拡大 Dynkin 図形において $-\psi$ と結ばれる頂点は、ウェイトが 1 の頂点たちである。]

3.2 巾零多様体

$S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)$ を対称代数とし、その $G_{\mathbb{C}}$ 不変元の全体を $J = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)^{G_{\mathbb{C}}}$ で表そう。このとき $J = \operatorname{gr} Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ であることに注意せよ。

Theorem 3.18 (Chevalley) $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ を Cartan 部分環とすると制限写像

$$\varphi : S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) \to S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)$$

によって次の同型が導かれる。

$$\varphi : J = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)^{G_{\mathbb{C}}} \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^W$$

Proof. $\varphi : J \to S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^W$ が単射準同型であることは、$\operatorname{Ad}(G_{\mathbb{C}})\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が稠密であることより従う。全射性はコンパクト実形上の不変積分を用いて証明できる。(あるいは純代数的に証明しようとすれば、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の表現の指標を制限したものが $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^W$ を張ることを示すということも考えられる。) Q.E.D.

ワイル群の不変式環もまた Chevalley によって良く知られており、

Theorem 3.19 $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*)^W$ は $l = \dim \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 変数の多項式環であって、多項式の生成元として同次式 $\{u_i \mid 1 \le i \le l\}$ が取れる。このとき $\deg u_i = m_i + 1$ は同次式の取り方によらず決まり、m_i はワイル群の exponents を与える[15][16]。

Proof. これは難しいのでやらない。例えば [60] あるいは [49, § 3.5 – § 3.8] を参照のこと。 Q.E.D.

この生成元 u_i を固定し、これを $J = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)^{G_{\mathbb{C}}}$ に引き戻したものも同じ u_i で書くことにする。また $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)^{G_{\mathbb{C}}}$ のうち原点で消えているものを $J_+ = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)_+^{G_{\mathbb{C}}}$ と書く。

Theorem 3.20 (Kostant) (1) 巾零元全体は $J_+ = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*)_+^{G_{\mathbb{C}}}$ のゼロ点と一致する。つまり

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid f(x) = 0 \quad (\forall f \in J_+)\}$$

(2) したがって $\mathcal{N}$ は代数的集合になるが、実は既約な代数多様体であって (**巾零多様体**と呼ぶ)、その定義イデアルは $J_+S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*) = (J_+$ で生成されたイデアル$)$ に一致する。特に $\mathcal{N}$ の定義方程式として $u_i = 0$ $(1 \le i \le l)$ が取れる。

(3) $\mathcal{N}$ は正則巾零元からなる軌道 $\mathcal{O}_{max}$ のザリスキ閉包に一致し、完全交叉、正規多様体になる。

Proof. (1) $D(x) = \det(t - \operatorname{ad} x)$ とおくと、定義より明らかに $D(x) \in J$ であって、さらに t について展開すると、最高次以外の各係数はすべて J_+ に入っていることが分かる。Cayley-Hamilton の公式より (なんと懐かしい響き!)、もし x が J_+ で消えていれば、$(\operatorname{ad} x)^{\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = 0$ であることがわかる。実はもっと小さなベキで消えているのだけれど、巾零ということでは問題ない。したがって $\supset$ が示された。

逆の包含関係について。x を巾零として $f \in J_+$ を取る。x の随伴軌道 $\mathcal{O}_x$ は錐であって、$0 \in \overline{\mathcal{O}_x}$ に注意せよ。f は $G_{\mathbb{C}}$ 不変なので

$$f(x) = f(\mathcal{O}_x) = f(\overline{\mathcal{O}_x}) = f(0) = 0$$

となり、$\subset$ が証明された。

(2) と $\mathcal{N}$ の正規性は難しい。(ここでは証明しない。[29, Th. 10] 参照。証明のキーとなるのは、 $(du_i)_{1 \le i \le l}$ の一次独立性である。)

$X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が正則元であるとは、X を通る軌道が最大次元になること (同じことだが、余次元が $l = \operatorname{rank} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ であること) なので、$\mathcal{O}_{max} \subset \mathcal{N}$ は同じ次元を持つ。実際 $\mathcal{N}$ は有限個の巾零軌道の和で、$\mathcal{O}_{max}$ はその中で最大次元であるから。一方 $\mathcal{N}$ は l 個の定義方程式で定義されているので、完全交叉である。 Q.E.D.

[15] exponents はコクセター元の指数として定義される。つまり、 h をコクセター元の位数とするとき、コクセター元の固有値が $\exp 2\pi m_i/h$ $(1 \le i \le l)$ で与えられる。

[16] $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のポアンカレ級数は $\prod_{i=1}^{l}(1 + t^{2m_i+1})$ で与えられる。

Exercise 3.21 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_l)$ のヤコビアンを

$$J = \det\left(\frac{\partial u_i}{\partial h_j}\right)_{1\le i,j\le l}$$

とすると、

$$J = c \cdot \prod_{\alpha\in\Delta^+} \alpha \quad (c \neq 0 : \text{定数})$$

となることを示せ。([29, p. 357] 参照)

Corollary 3.22 随伴軌道 $\mathcal{O}$ の閉包がゼロを含むことと、$\mathcal{O}$ が巾零軌道であることは同値である。特に随伴軌道でかつ錐であるものは巾零軌道である。

Remark 3.23 ここでは触れる機会がなかったが、一般の随伴軌道については、$x = x_s + x_n$ とジョルダン分解したとき、

$$G \times_{Z_G(x_s)} \mathcal{O}_{Z_G(x_s)}(x_n) \ni (g, y) \mapsto g(x_s + y) \in \mathcal{O}_G(x)$$

という対応で G 等質多様体としての同型がある。(軌道のジョルダン分解)

このとき x_n が $Z_G(x_s)$ の主巾零元なら $\mathcal{O}_G(x)$ は最大次元の軌道 (余次元が $\operatorname{rank} G$) となり、$\mathcal{R}\left(\mathcal{O}_G(x)\right)$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ の調和多項式の空間と一致することが Kostant によって明らかにされている。これを最高ウェイト多様体の場合と比較してみるとよい。

3.3 巾零多様体の次数

極小巾零軌道と巾零多様体 $\mathcal{N}$ (あるいは主巾零軌道といっても同じ) の次数を計算しておく。

Theorem 3.24 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を単純とする。極小巾零軌道 $\mathcal{O}_{\min}$ の次数は、最高ルート ψ に対して $\Delta^+(\psi) = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \langle\alpha, \psi\rangle \neq 0\}$ とおくと、

$$\deg \overline{\mathcal{O}_{\min}} = \left(\#\Delta^+(\psi)\right)! \prod_{\alpha\in\Delta^+(\psi)} \frac{\langle\psi, \psi\rangle}{2\langle\rho, \alpha\rangle}$$

で与えられる。

Proof. まず $\dim \mathcal{O}_{\min} = \#\Delta^+(\psi) + 1$ であることと、$\alpha \in \Delta^+(\psi)$ に対して、$2\langle\alpha, \psi\rangle = \langle\psi, \psi\rangle$ であることに注意しておこう。

さて、$\mathcal{O}_{\min}$ は最高ウェイト多様体なので、$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_{\min}}]$ の $G_{\mathbb{C}}$ 加群としての構造は既に分かっている。

$$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_{\min}}] \simeq \sum_{m\ge 0}^{\oplus} \tau_{m\psi}$$

ここで $\tau_{m\psi}$ はちょうど斉次次数 m の斉次部分を与えていることに注意する。したがってワイルの次元公式によってヒルベルト関数を計算すると、

$$\begin{aligned}\dim \tau_{m\psi} &= \prod_{\alpha\in\Delta^+} \frac{\langle m\psi+\rho,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle} \\ &= m^{\#\Delta^+(\psi)} \prod_{\alpha\in\Delta^+(\psi)} \frac{\langle\psi,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle} + O(m^{\#\Delta^+(\psi)-1})\end{aligned}$$

となる。あとはヒルベルト関数とポアンカレ級数との関係より、次数の公式が従う。Q.E.D.

Theorem 3.25 巾零多様体 (または主巾零軌道) の次数はワイル群の位数に一致する。

$$\deg\mathcal{N} = \#W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$$

Proof. Kostant の結果から、$\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ はちょうど $G_{\mathbb{C}}$ の作用に関する調和多項式の空間と同型になる。さらに

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}] \simeq \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]^{G_{\mathbb{C}}} \quad (\mathcal{H} \text{ は調和多項式})$$

であることに注意しよう。したがってポアンカレ級数を比較すると

$$\begin{aligned}P(\mathcal{H};t) &= \frac{P(\mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}];t)}{P(\mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]^{G_{\mathbb{C}}};t)} \\ &= \frac{1}{(1-t)^{\dim\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}}\cdot\frac{1}{P(\mathbb{C}[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}]^W;t)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^l(1-t^{m_i+1})}{(1-t)^{\dim\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}}\end{aligned}$$

がわかる。ここで $l=\operatorname{rank}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ であって、$\{m_i\}$ は exponents である。両辺に $(1-t)^{\dim\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}-l}$ を掛けて、$t\to 1$ とすると、次数が $\prod_{i=1}^l(m_i+1)=\#W$ で与えられることが分かる。Q.E.D.

Remark 3.26 射影幾何的に言えば、射影多様体 $V\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の次数は一般の $n-\dim V$ 次元 (射影) 線型部分空間と、V との交点数を表す。今の場合、$\mathcal{N}$ と一般の $l=\operatorname{rank}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 次元の超平面との (射影化された) 交点数が $\#W$ であるということになる。残念ながら Cartan 部分代数を「一般の超平面」として取るわけにはいかないが、Kostant ([29, Theorem 12]) により次の結果が知られている。

Theorem 3.27 (Kostant) 原点における Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ と巾零多様体 $\mathcal{N}$ との交点重複度 (接している次数) は $\#W$ に一致する。

また最大次元の半単純軌道 (これは既に射影多様体ではないが) と $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ との交点数が $\#W$ であることにも注意しておこう (これはワイル群 W の定義から従う)。

Remark 3.28 上の $\mathrm{Ad}\,(G)$-調和多項式の空間 $\mathcal{H}$ は次のように分解する。

$$\mathbb{C}[\mathcal{N}] \simeq \mathcal{H} \simeq \sum_{\lambda}^{\oplus} \dim V_\lambda^T \, V_\lambda^*$$

ただし T は Cartan 部分群で、V_λ^T は T 固定部分空間 (ゼロ・ウェイト空間) を表す。(ちょうど V_λ^T にはワイル群が自然に作用していることに注目して欲しい。)

上の既約分解は、$\forall X_{r.s} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 正則半単純元に対して、

$$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}[\mathcal{O}_{X_{r.s}}] \simeq \mathbb{C}[G/T] = \mathbb{C}[G]^T$$

となることと Peter-Weyl の定理により従う。

4 Cartan 分解と巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道

4.1 $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ の極小巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道

Theorem 4.1 $\mathfrak{g}$ を 実 単純 Lie 代数とし、その複素化が複素単純 Lie 代数であると仮定する。[17] その Cartan 分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{s}$$

と書いておく。$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{s}$ に随伴表現で作用している。

(1) $\mathfrak{k}$ の表現 $\mathfrak{s}/\mathbb{R}$ は (実数体上) 既約である。

(2) $\mathfrak{s}$ が絶対既約でなければ、その複素化は $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{s}^+ \oplus \mathfrak{s}^-$ と二つの既約成分に分解し、この時 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は Hermite 対称対になる。したがって $\mathfrak{k}$ は一次元の中心を持つ。

Proof. $\mathfrak{s}$ が可約なら、$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2$ と Killing 形式に関して直交直和に分解した時、$[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] \oplus \mathfrak{s}_i$ が自明でないイデアルになる。このことは $[\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2] \perp \mathfrak{k}$ したがって $[\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2] = 0$ であることから容易に従う。

もし $\mathfrak{s}$ が絶対既約でなければ、 $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ は二つの既約成分に分解する。これら二つの表現は互いに複素共役の関係にある。[以下一般論による証明は未完：しかし事実としては正しい (case-by-case analysis)] Q.E.D.

Theorem 4.2 次のいずれかの場合が起る。

(1) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ はエルミート対称対で、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min} = \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^+} \cup \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^-}$ と二つの同次元の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道に分解する。このとき $\mathfrak{s}^{\pm} \cap \mathcal{O}_{\min} = \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^{\pm}}$ が成り立つ。さらに $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^{\pm}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min}$ である。

(2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ はエルミート対称対ではなく、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min} = \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}}$ はただ一つの $K_{\mathbb{C}}$ 軌道からなる。このとき $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min}$ である。

(3) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ はエルミート対称対ではなく、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min} = \emptyset$ である。

Proof. $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ の $K_{\mathbb{C}}$ の表現としての最高ウェイトを取りそれを ψ とする。適当に正ルート系を決めておけば、エルミート対称対のときには二つ、そうでないときにはただ一つの ψ が決まる。(エルミート対称対のときにはどちらでも良いが例えば $\mathfrak{s}^+$ の最高ウェイトを ψ とする。)

結論としてはこの ψ が最高ルートのとき、そのときに限り $\mathcal{O}_{\min}$ と $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ との交わりがある。

ψ が最高ルートなら交わりがある方は自明である。すべての最高ルートは $G_{\mathbb{C}}$ 共役であることに注意せよ。

逆にもし交わりがあれば ψ を最高ルートとして $X_{\psi} \in \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ である。このとき、対応する Cartan 部分代数から H_{ψ} をとって、$\operatorname{ad} H_{\psi}$ の固有値で $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を分解すると固有値 2 の固有ベク

[17] 要するにこれは $\mathfrak{g}$ が複素単純 Lie 代数を実 Lie 代数と思ったものでは ない ことを意味している。

トルは X_ψ のみである。一方 $X_\psi \in \mathfrak{s}_\mathbb{C}$ に対してかならず正規 $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{Y \in \mathfrak{s}_\mathbb{C}, H \in \mathfrak{k}_\mathbb{C}, X_\psi\}$ が取れる ([30, Prop. 4] または [46, Th. 9.4.2])。このとき H と H_ψ は $G_\mathbb{C}$ 共役なので、最初から $H = H_\psi$ として一般性を失わない。

すると $\operatorname{ad} H$ の固有値が $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ であって、しかも固有値が 2 のものは X_ψ しかないことにより、H を含む $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ の Cartan 部分代数で X_ψ を最高ウェイトにするようなものが取れる。これについては次の式を参考にすると良い。

$$[H, H'] = 0 \text{ なら } [H, [H', X_\psi]] = [H', [H, X_\psi]] = \psi(H)[H', X_\psi]$$

ここで $\psi(H) = 2$ だから

$$[H', X_\psi] = \alpha X_\psi$$

つまり X_ψ は $\operatorname{ad} H'$ の固有ベクトル (ルートベクトル) になる。あとは $H = H_\psi$ を用いてルートに順序を入れると自然に X_ψ は最高ウェイトとなる。[18]

さらにエルミート対称対の場合には X_ψ と $X_{-\psi}$ は $K_\mathbb{C}$ で移りあわないことに注意しよう。これが移りあえば非エルミート対称対の場合になってしまうからである。したがってこの場合には少なくとも二つの軌道が現れる (もし空でなければ) が、この二つのみしか軌道がないことも容易に分かる。

あとはこの主張にしたがって既約なものを分類してみると、エルミート対称対の場合には $\mathcal{O}_{\min} \cap \mathfrak{s}_\mathbb{C} \neq \emptyset$ であることが (結果として) 分かる。[19]

次元については次の Vogan による一般的な結果 (定理 4.3) を適用すればよい。(しかしこいつは難しい。実際には各場合に次元を計算するのが簡単。) Q.E.D.

Theorem 4.3 (Vogan) $(G_\mathbb{C}, K_\mathbb{C})$ を対称対とする。このとき $\forall \lambda \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}^*$ に対して、$G_\mathbb{C} \cdot \lambda \cap (\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{k}_\mathbb{C})^*$ は空でないなら有限個の $K_\mathbb{C}$ 軌道の和であって、各軌道は $G_\mathbb{C} \cdot \lambda$ の smooth, reduced, Lagrangean subvariety である。特に各軌道は同次元で、その次元は $\frac{1}{2} \dim_\mathbb{C} G_\mathbb{C} \cdot \lambda$ に等しい。

Proof. [33, Cor. 5.20] 参照。 Q.E.D.

[18] 上の議論は次のように言っても良い (はずだ)。fundamental Cartan subgroup を取ったとき、non-compact imaginary root ψ で最高ルートになっているものが取れれば $\mathcal{O}_{\min}$ との交わりがある。そうでなければ交わりはない。これは実は岩澤 Cartan 部分群を取ったとき、実ルートで最高ルートになっているものがあるという条件と同値である。

[19] これはエルミート対称対の理論をきちんとたどれば抽象的に証明可能だろう。

定理 4.2 の三つの場合にすべての既約対称対を分類してリストアップしておく。

(1) 表 1: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ はエルミート対称対、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min} = \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^+} \cup \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^-}$ の場合。

Table 1: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ はエルミート対称対、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min} = \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^+} \cup \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^-}$

Cartan 分類記号	典型例 G/K	$\mathfrak{s}^+$ ($K_{\mathbb{C}}$ の表現)	次元
AIII	$SU(p,q)/S(U(p) \times U(q))$	$\mathbb{C}^p \boxtimes (\mathbb{C}^q)^* \simeq M_{p,q}$	pq
BDI	$SO(p,2)/SO(p) \times SO(2)$ $(p \geq 2)$	$\mathbb{C}^p \boxtimes \mathbb{C}$	p
CI	$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$	$S^2(\mathbb{C}^n) \simeq \mathrm{Sym}\,(\mathbb{C}^n)$	$n(n+1)/2$
DIII	$SO^*(2n)/U(n)$	$\wedge^2\mathbb{C}^n \simeq \mathrm{Alt}\,(\mathbb{C}^n)$	$n(n-1)/2$
EIII	$E_{6,2}/Spin(10) \times SO(2)$	$\frac{1}{2}$-spin $\boxtimes\, \mathbb{C}$	16
EVII	$E_{7,3}/E_6 \times SO(2)$	$\tau(\varpi_1) \boxtimes \mathbb{C}$	27

ただし $E_{l,r}$ はランクが l で実ランクが r の実 non-compact な Lie 群を表す (このようなものはただ一つなので)。また $\mathfrak{s}^- = \overline{\mathfrak{s}^+}$ なので、表中には $\mathfrak{s}^+$ のみあげておいた。
表中 $\tau(\lambda)$ は最高ウェイトが λ の既約表現。ϖ_i は i 番目の基本ウェイト (番号付は [60] の最後の付表による)。$\frac{1}{2}$-spin はスピン表現の既約成分の一つ (スピン表現は二つの既約成分を持つ)。

(2) 表 2 : $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は非エルミート対称対、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min} = \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}$ の場合。

Table 2: $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は非エルミート対称対、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min} = \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}$

Cartan 分類記号	典型例 G/K	$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ ($K_{\mathbb{C}}$ の表現)	$\dim \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$
AI	$SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$	$S^2(\mathbb{C}^n) \simeq \mathrm{Sym}\,(\mathbb{C}^n)$	$n(n+1)/2$
BDI	$SO(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ $(p \geq q \geq 3)$	$\mathbb{C}^p \boxtimes (\mathbb{C}^q)^* \simeq M_{p,q}$	pq
FI	$F_{4,4}/Sp(3) \times SU(2)$	$(\wedge^3 \mathbb{C}^6)_0 \boxtimes \mathbb{C}^2$	28
EII	$E_{6,4}/SU(2) \times SU(6)$	$\wedge^3 \mathbb{C}^6 \boxtimes \mathbb{C}^2$	40
EVI	$E_{7,4}/Spin(12) \times SU(2)$	$\frac{1}{2}$-spin $\boxtimes \mathbb{C}^2$	64
EIX	$E_{8,4}/E_7 \times SU(2)$	$\tau(\varpi_7) \boxtimes \mathbb{C}^2$	112
G	$G_2/SU(2) \times SU(2)$	$\mathbb{C}^4 \boxtimes \mathbb{C}^2$	8
EI	$E_{6,6}/Sp(4)$	$\tau_{\varpi_4} \simeq (\wedge^4 \mathbb{C}^8)_0$	42
EV	$E_{7,7}/SU(8)$	$\wedge^4 \mathbb{C}^8$	70
EVIII	$E_{8,8}/Spin(16)$	$\tau(\varpi_8) \simeq \frac{1}{2}$-spin	$2^7 = 128$

$F_{l,r}$ などの表記も表 1 と同様。ただし G_2 は非コンパクト実形が一つしかない。表中 $\tau(\lambda)$ は最高ウェイトが λ の既約表現。ϖ_i は i 番目の基本ウェイト (番号付は [60] の最後の付表による)。$\frac{1}{2}$-spin はスピン表現の既約成分の一つ (スピン表現は二つの既約成分を持つ)。E_7 の表現 $\tau(\varpi_7)$ は minuscule と呼ばれる。$Sp(n)$ の表現 $(\wedge^n \mathbb{C}^{2n})_0$ については演習 4.4 を参照。

(3) 表 3 : $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ は非エルミート対称対、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}\cap\mathcal{O}_{\min}=\emptyset$ の場合。

Table 3: $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ は非エルミート対称対、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}\cap\mathcal{O}_{\min}=\emptyset$

Cartan 分類記号	典型例 G/K	$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ ($K_{\mathbb{C}}$ の表現)	$\dim\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$
AII	$SU^*(2n)/Sp(n)$	$\{X\in M_n(\mathbb{H}) \mid {}^t\overline{X}=X,$ $\mathrm{Re}\,(\mathrm{trace}\,X)=0\}_{\mathbb{C}}$	$(2n+1)(n-1)$
BII	$SO(p,1)/SO(p)$	$\mathbb{C}^p$	p
CII	$Sp(p,q)/Sp(p)\times Sp(q)$	$\mathbb{C}^{2p}\boxtimes\mathbb{C}^{2q}$	$2p\cdot 2q$
EIV	$E_{6,2}/F_4$	$\tau(\varpi_4)$	26
FII	$F_{4,1}/Spin(9)$	$\tau(\varpi_4)$	16

Exercise 4.4 $\mathbb{C}^{2n}$ の非退化な symplectic form を取り、自然表現 $Sp(2n,\mathbb{C})\curvearrowright\mathbb{C}^{2n}$ を考える。

(1) $\mathcal{U}=\{U\subset\mathbb{C}^{2n}\mid U$ は極大全等方的部分空間$\}$ とおくと、$Sp(2n,\mathbb{C})$ は $\mathcal{U}$ に推移的に働くことを示せ。

(2) $U\in\mathcal{U}$ の基底を $\{u_1,\dots,u_n\}$ とし、写像

$$\mathcal{U}\ni U\overset{\varphi}{\longmapsto}[u_1\wedge\cdots\wedge u_n]\in\mathbb{P}(\wedge^n\mathbb{C}^{2n})$$

を考える。$\varphi(U)$ が生成する部分空間 $\subset\wedge^n\mathbb{C}^{2n}$ は $Sp(2n,\mathbb{C})$ の既約表現を与え、その最高ウェイトは $\varpi_n=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n$ (Bourbaki の記号) となることを示せ。

このようにして得られた既約表現を $(\wedge^n\mathbb{C}^{2n})_0$ と表す。この表現の別の構成については例えば [79, Theorem 17.5] を参照せよ。

4.2 Kostant-関口対応

以下の議論では直接表に現れないが、常にその底流に流れている考え方として、実巾零軌道と $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ における巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道との対応がある。これは Kostant 流に言えば、実 $\mathfrak{sl}_2$-triple と、正規 $\mathfrak{sl}_2$-triple の間の対応関係であり、関口流に解釈すれば Cayley 変換の理論となる。どちらのアプローチでも Cartan 代数の間の対応までが誘導されることは興味深い。

Definition 4.5 $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{Y, H, X\}$ が正規 (normal) であるとは、$H \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}},\quad X, Y \in \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ となるときに言う。つまり、 Cartan 対合を θ とするとき、

$$\theta(H) = H,\ \theta(X) = -X,\ \theta(Y) = -Y$$

がなりたつ。

また $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{Y, H, X\}$ が Cayley 型であるとは、

$$\theta(H) = -H,\ \theta(X) = -Y,\ \theta(Y) = -X$$

となるときに言う。

Example 4.6 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ において、 $\theta(X) = -{}^tX$ とすれば、

$$\text{normal}:\ H = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix},\ Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cayley}:\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Theorem 4.7 (Mostow) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の任意の $\mathfrak{sl}_2$-triple は Cayley 型の $\mathfrak{sl}_2$-triple に随伴共役である。

Cayley 型の $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{Y, H, X\}$ に対して、新しい $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{sl}_2$-triple$\{Y', H', X'\}$ を

$$H' = i(X - Y),\ X' = \frac{1}{2}(X + Y + iH),\ Y' = \frac{1}{2}(X + Y - iH)$$

で定義する。これを Cayley 変換と呼ぶ。このとき、その定め方から明らかに $\{Y', H', X'\}$ は正規 $\mathfrak{sl}_2$-triple である。

Theorem 4.8 (関口) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ における (実) $G_{\mathbb{R}}$ 巾零軌道 $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$ と、$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ における (複素) $K_{\mathbb{C}}$ 巾零軌道 $\mathcal{O}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}}$ は一対一に対応する。その対応は、 Cayley 型の $\mathfrak{sl}_2$-triple と正規 $\mathfrak{sl}_2$-triple の間の Cayley 変換によって与えられる。さらに次が成り立つ。

(1) 対応する二つの巾零軌道は同じ $G_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ を生成する。

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}},\ \mathcal{O}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} \cap \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$$

(2) 対応する軌道の次元、さらにこの二つを含む $G_{\mathbb{C}}$ 軌道の次元の関係は次のようになる。

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$$

Proof. [22] 参照。 Q.E.D.

Remark 4.9 Vergne によって K 多様体 $/\mathbb{R}$ として $\mathcal{O}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}}$ であることが証明されている。

最近になって Schmid-Vilonen [80] により、随伴多様体と漸近台が Kostant-関口対応によって対応していることが証明された (が筆者は証明を follow できていない)。これで、随伴多様体、漸近台、波面集合という巾零軌道と密接に関わっている不変量がすべて (本質的には) 同じものであったことが明らかになった。以上については直接彼らの一連の論文に当たってみられたい。

5 極小表現の定義と一般論

5.1 Joseph イデアル

この節では $\mathfrak{g}$ で 複素単純 Lie 環を表す。また G は (複素) 随伴群とする。

Theorem 5.1 複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して次が成り立つ。

(1) $\mathfrak{g}$ が A_n 型ではないとする。このとき $\mathfrak{g}$ にはただ一つの (自明でない) 最小次元の G 軌道 $\mathcal{O}_{\min}$ が存在する。その軌道は巾零軌道であって、 ψ を $\mathfrak{g}$ の最高ルートとすると、

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\min} &= G\cdot X_\psi \quad (X_\psi \text{ はルート } \psi \text{ のルートベクトル})\\ &= G\cdot X_\alpha \quad (\alpha \text{ は任意の long root})\end{aligned}$$

(2) $\mathfrak{g}$ が A_n 型なら、巾零 G 軌道の中でただ一つ最小次元のものが存在し、それを $\mathcal{O}_{\min}$ と書くと、

$$\mathcal{O}_{\min} = G\cdot X_\psi = G\cdot X_\alpha \;(\forall\alpha:\text{ ルート})$$

このとき、$\mathcal{O}_{\min}$ は (自明でない) G 軌道の中で最小の次元を持つ。また $\mathcal{O}_{\min}$ と同じ次元の半単純軌道が連続無限個存在し、$\mathcal{O}_{\min}$ はこれらの軌道の極限である。

Proof. 極小巾零軌道がすべての軌道の中で最小次元であることはすでに示した (定理 1.10)。問題はそれがただ一つかどうかという点に尽きる。

Lemma 5.2 最小次元の軌道は巾零軌道かあるいは半単純軌道である。

Proof. $x\in\mathfrak{g}$ をゼロでない任意の元とする。x のジョルダン分解を $x = x_s + x_n$ とすると

$$Z_{\mathfrak{g}}(x) = Z_{\mathfrak{g}}(x_s)\cap Z_{\mathfrak{g}}(x_n)$$

だから、

$$\dim G\cdot x_s,\ \dim G\cdot x_n \le \dim G\cdot x$$

がわかる。等号が成立するのは $Z_{\mathfrak{g}}(x_s)\subset Z_{\mathfrak{g}}(x_n)$ または $Z_{\mathfrak{g}}(x_s)\supset Z_{\mathfrak{g}}(x_n)$ の時である。

$\mathfrak{g}_1 := Z_{\mathfrak{g}}(x_s)$ とおくと、 x_n は $\mathfrak{g}_1$ の巾零元とみなせることに注意する。

まず $\mathfrak{g}_1 = Z_{\mathfrak{g}}(x_s)\subset Z_{\mathfrak{g}}(x_n)$ のとき。よく知られているように $\mathfrak{g}_1$ は reductive な Lie 代数である。このとき $Z_{\mathfrak{g}_1}(x_n) = \mathfrak{g}_1$ なので $x_n = 0$ となる。

次に $\mathfrak{g}_1 = Z_{\mathfrak{g}}(x_s)\supset Z_{\mathfrak{g}}(x_n)$ のとき。系 3.5 より、$\mathfrak{g}_1$ の Cartan 部分代数 (= $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数) を適当にとり、さらに正ルート系をうまくとれば x_n は正のルートベクトルの一次結合に書けている。もし $\mathfrak{g}_1 \subsetneqq \mathfrak{g}$ ならば、ある十分大きな正ルート $\gamma\in\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\backslash\Delta^+(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{h})$ が存在して $X_\gamma\in Z_{\mathfrak{g}}(x_n)$ となる。(下記演習参照) ところが $X_\gamma\notin\mathfrak{g}_1$ だから、矛盾である。したがって $\mathfrak{g}_1 = Z_{\mathfrak{g}}(x_s) = \mathfrak{g}$ となる。$\mathfrak{g}$ は単純だから $x_s = 0$ がわかる。 Q.E.D.

Exercise 5.3 $x = x_s + x_n$ をジョルダン分解として、$\mathfrak{g}_1 = Z_{\mathfrak{g}}(x_s)$ とおく。$\mathfrak{g}_1 \subsetneqq \mathfrak{g}$ ならば、ある十分大きな正ルート $\gamma \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \backslash \Delta^+(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h})$ が存在して $X_\gamma \in Z_{\mathfrak{g}}(x_n)$ となることを示せ。

巾零軌道中で最小次元のものはただ一つ、$\mathcal{O}_{\min}$ であったから (定理 1.10) あとは半単純軌道を調べればよい。半単純元 $x = x_s$ に対しては、その中心化代数 $Z_{\mathfrak{g}}(x_s)$ は reductive で、しかもある放物型部分代数の Levi part になっている。したがって半単純軌道の次元の最小値は

$$\ell(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{g} \text{ は放物型部分代数 }\}$$

とおくと $2\ell(\mathfrak{g})$ で与えられる。

一方放物型部分代数 (の共役類) は単純ルート系の部分集合と一対一に対応しているから、$\ell(\mathfrak{g})$ を具体的に求めることは容易である。さらに次の命題 5.4 から $\dim \mathcal{O}_{\min}$ もわかるので両者を比較すれば、結果として A_n 型以外では $\mathcal{O}_{\min}$ がただ一つの最小次元の軌道であることがわかる。(この後の表 5.1 参照)

A_n 型については、$2\ell(\mathfrak{g}) = \dim \mathcal{O}_{\min}$ なので、ある極大放物型部分代数があって、その Levi part を与えるような半単純元の軌道はやはり最小次元となる。これが無限個あることは見易い。このような軌道の極限として $\mathcal{O}_{\min}$ が得られることは実際にやってみればわかる。
Q.E.D.

Proposition 5.4 ψ を最高ルートとして、$\mathcal{O}_{\min} = G \cdot X_\psi$ を極小巾零軌道とする。

$$\Gamma = \{\gamma \in \Delta \mid (\gamma, \psi) > 0\} \subset \Delta^+$$

とおくと、$\mathcal{O}_{\min}$ の次元は $\dim \mathcal{O}_{\min} = \#\Gamma + 1$ で与えられる。

Proof. 射影空間 $\mathbb{P}\mathfrak{g}$ で考えると、X_ψ の固定部分群は放物型部分群 Q になる (演習 1.4 (2) 参照)。このとき

$$\mathfrak{g}^\Gamma = \sum_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}_\alpha$$

はその巾零根基と一致する。これが示されれば $\mathfrak{q}/Z_{\mathfrak{g}}(X_\psi) \simeq \mathbb{C}$ だから、

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}_{\min} &= \dim \mathfrak{g} - \dim Z_{\mathfrak{g}}(X_\psi) \\ &= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{q} + 1 \\ &= \dim \mathfrak{g}^\Gamma + 1 = \#\Gamma + 1 \end{aligned}$$

となって証明が完結する。

ところがルートの string の理論より、

$$(\gamma, \beta) > 0 \iff \gamma - \beta \in \Delta \cup \{0\} \iff \beta - \gamma \in \Delta \cup \{0\}$$

である (例えば [48, § 9.4])。このことからまず $\Gamma \subset \Delta^+$ が結論される。さらに $\gamma \in \Delta^+$ に対して、$[X_{-\gamma}, X_\psi] \neq 0 \iff \psi - \gamma \in \Delta \cup \{0\} \iff \gamma \in \Gamma$ なので ([48, § 25.2] 参照)、結局

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \\ (\alpha,\gamma)=0}} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}^\Gamma$$

となって確かに $\mathfrak{g}^\Gamma$ は巾零根基である。 Q.E.D.

Remark 5.5 巾零 Lie 環 $\mathfrak{g}^\Gamma$ はその中心が $\mathfrak{g}_\psi$ であるようなハイゼンベルグ Lie 代数となっている。

後は計算あるのみであるが、$\ell(\mathfrak{g})$ と $\dim \mathcal{O}_{\min}$ の値を表にして示しておく。もちろん $2\ell(\mathfrak{g}) \geq \dim \mathcal{O}_{\min}$ である。また随伴軌道はすべて偶数次元であることがよく知られていて、$\dim \mathcal{O}_{\min}$ はすべて偶数である。

$\mathfrak{g}$	$\ell(\mathfrak{g})$	$\dim \mathcal{O}_{\min}$
A_n	n	$2n$
B_n	$2n-1$	$4(n-1)$
C_n	$2n-1$	$2n$
D_n	$2(n-1)$	$2(2n-3)$
E_6	16	22
E_7	27	34
E_8	57	58
F_4	15	16
G_2	5	6

Table 4: $\ell(\mathfrak{g})$ と $\dim \mathcal{O}_{\min}$

Exercise 5.6 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ において、上半三角行列を Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ とするような正ルート系を取る。この時最高ルートに対応するルートベクトルは $X_\psi = E_{1,n}$ (E_{ij} は行列単位) で与えられる。

(1) $Z_{\mathfrak{g}}(X_\psi)$ を求めよ。

(2) $\mathfrak{g}^\Gamma$ を求め、これが $(2n+1)$ 次元のハイゼンベルグ代数であることを確認せよ。(ハイゼンベルグ代数のごく一般的な実現と一致する)

(3) $\mathfrak{b}$ を含む放物型部分代数 $\mathfrak{q}$ で $\ell(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ となるものを決定せよ。

Theorem 5.7 (Joseph) $\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 代数で、A_n 型ではないとする。このとき、completely prime な両側イデアル $\mathcal{J}$ であってその随伴多様体が $\overline{\mathcal{O}_{\min}}$ に一致するものがただ一つ存在する。このイデアル $\mathcal{J}$ を **Joseph イデアル**と呼ぶ。さらに Joseph イデアルは次を満たす。

(1) $\mathcal{J}$ は極大イデアルであって (したがって原始イデアルでもある)、$\mathfrak{g}$ の真部分代数からは誘導されない。

(2) $\mathcal{J}$ の無限小指標は次のように与えられる。[20]

$\{\varpi_i \mid 1 \le i \le \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}\}$ を基本ウェイトとする (基本ウェイトの番号付は [60] の付表による)。

B_n	$\sum_{i=1}^{n-3} \varpi_i + \frac{1}{2}\varpi_{n-2} + \frac{1}{2}\varpi_{n-1} + \varpi_n$
C_n	$\sum_{i=1}^{n-1} \varpi_i + \frac{1}{2}\varpi_n$
D_n	$\sum_{i=1}^{n-3} \varpi_i + \varpi_{n-1} + \varpi_n$
E_6	$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_5 + \varpi_6$
E_7	$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_5 + \varpi_6 + \varpi_7$
E_8	$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_5 + \varpi_6 + \varpi_7 + \varpi_8$
F_4	$\frac{1}{2}\varpi_1 + \frac{1}{2}\varpi_2 + \varpi_3 + \varpi_4$
G_2	$\varpi_1 + \frac{1}{3}\varpi_2$

Table 5: Joseph イデアルの無限小指標 ([18, p. 15] よりの引用)

Remark 5.8 There are several notions of primitivity in $U(\mathfrak{g})$ (cf. Dixmier [66]).

$$
\begin{array}{ccccc}
I: \text{maximal} & & I: \text{completely prime} & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \\
I: \text{primitive} & \Rightarrow & I: \text{prime} & \Rightarrow & I: \text{semi-prime}
\end{array}
$$

$A \ni 1$: ring

(1) $I \subset A$: prime ideal $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} A/I \supset \forall J_1, J_2 : \text{ideals } \neq 0 \\ \Rightarrow \ J_1 \cdot J_2 \neq (0) \end{array} \right)$

(2) $I \subset A$: completely prime $\Leftrightarrow$ A/I : integral domain

(3) $I \subset A$: semi-prime ideal $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} A/I \supset J : \text{nilpotent ideal} \\ \Rightarrow \ J = (0) \end{array} \right)$

Proof. 証明は [18] を参照のこと。

イデアルの誘導について解説しておく。$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ を部分代数とし、$\mathcal{I}$ を $U(\mathfrak{a})$ の両側イデアルとする。このとき $U(\mathfrak{g})\mathcal{I}$ に含まれる最大のイデアルを $\mathcal{I}$ から誘導されたイデアルという。これは表現の誘導にちょうど対応している ([66, Prop. 5.1.7] 参照)。 Q.E.D.

[20] この表は無限小指標だけでなく最高ウェイト λ を持つ Verma 加群 M_λ の原始イデアルがちょうど $\mathcal{J}$ になるような $\lambda + \rho$ を与えていることに注意せよ。

最後に Garfinkle による Joseph イデアルの特徴付けを述べておこう。

まず $S_2(\mathfrak{g}) = \rho_{2\psi} \oplus E$ と G の表現に分解しておく。ここに ψ は最高ルートであって、$\rho_{2\psi}$ は最高ウェイトが 2ψ の既約表現である (その $S_2(\mathfrak{g})$ における重複度は 1 である)。E は残りの既約表現の直和。

このとき最高ウェイト多様体の理論から、E は $\mathcal{O}_{\min}$ 上消えていること、$\rho_{2\psi}$ の制限は $\mathcal{O}_{\min}$ 上生き残ることが分かる (定理 1.2 参照)。したがって $\sqrt{\operatorname{gr}\mathcal{J}} \cap S_2(\mathfrak{g}) = E$ である。Garfinkle の結果はこの逆が成り立つことを言っている。[21]

Theorem 5.9 (Garfinkle) $\mathcal{I} \subset U(\mathfrak{g})$ を両側イデアルであって、余次元が無限になるもの (つまり $\dim U(\mathfrak{g})/\mathcal{I} = \infty$) とする。このとき $\mathcal{I}$ が Joseph イデアルであるための必用十分条件は、$\operatorname{gr}\mathcal{I} \cap S_2(\mathfrak{g}) = E$ となることである。

Proof. [68] を参照のこと。(といっても西山は確認していない) Q.E.D.

5.2 極小表現の定義と存在

この節では G を <u>実</u> <u>単純</u> Lie 群、$\mathfrak{g}$ を対応する <u>実</u> Lie 代数とする。

Definition 5.10 $(\pi, \mathcal{H})$ を既約 Harish-Chandra 加群とするとき、$(\pi, \mathcal{H})$ が極小表現であるとは、その原始イデアルが Joseph イデアルのときに言う。($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が A_n 型の時には定義されない)

この定義では特に A_n 型の時に定義されていないことが不便で、さらに G によっては (いくら被覆群を取っても) 極小表現が存在しないことがある (命題 5.16 および表 6 参照)。そこで我々は以下のように拡張した定義もしておこう。

Definition 5.11 $(\pi, \mathcal{H})$ を既約 Harish-Chandra 加群とする。

(1) $(\pi, \mathcal{H})$ が GK-極小表現であるとは、その Gelfand-Kirillov 次元がゼロでない最小値を取るときに言う。

(2) $(\pi, \mathcal{H})$ が WF-極小表現であるとは、その波面集合 (あるいは漸近台) がただ一つの (ゼロでない) 極小巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道の閉包になっているときに言う。

すでに見たように (或はこれから明らかになるように)、GK-極小表現と WF-極小表現は非常に近い概念である (が、もちろん gap がある)。しかしこの二つと本来の極小表現との隔たりはかなり大きい。理想的には WF-極小表現であり、かつその原始イデアルが completely prime 程度を要請するべきなのだろうと思われる。

Remark 5.12 以上のほかに Kazhdan による極小表現の定義がある ([13], [14])。その直感的な理解には、例えば宇澤による解説 [16] (バージョンアップしたものがあるらしいので本

[21] $\operatorname{gr}\mathcal{J}$ は素イデアルであろうと思われるが、よくわからない。

人に問い合わせるのがよいだろう) を見よ。また実 Lie 群に対しては Torasso による構成がある ([17])。いずれも極小表現の研究にとって重要で活発な潮流の一つであるが、以下では触れない。

以下特に断らない限り、原始イデアルが Joseph イデアルであること を極小表現の定義とする。

まず極小表現を持つような単純 Lie 群をすべてリストアップしよう。以下、単純 Lie 群 G が極小表現を持つとは、 G のある有限被覆群が極小表現を持つことを意味するとする。

Theorem 5.13 極小表現 $(\pi, \mathcal{H})$ の随伴多様体は $\mathcal{O}_{\min} \cap \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ の連結成分の閉包 (の和) であって、Gelfand-Kirillov 次元は極小巾零軌道の次元のちょうど半分に一致する。

$$\operatorname{Dim} \pi_{\min} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}} \ (\text{または } \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^{\pm}})$$

Proof. 定義から随伴多様体が $\overline{\mathcal{O}_{\min}} = \mathcal{O}_{\min} \cup \{0\}$ に含まれていることは明らか。一方 $\mathcal{O}_{\min} \cap \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ は高々二つの軌道の和であり、$\mathcal{AV}(\pi) \neq \{0\}$ だから、主張が従う。

また Gelfand-Kirillov 次元については定理 2.18 (1) と極小表現の定義より従う。 Q.E.D.

Remark 5.14 $\operatorname{Dim} \pi_{\min}$ は表 5.1 を見れば具体的に分かる。ただし 1/2 の因子を忘れないこと。

Remark 5.15 極小表現の随伴多様体が実は一つの軌道の閉包になることは後で示される。定理 5.23 を見よ。

定理 4.2 で $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{O}_{\min}$ の分解について述べてあり、それに続く表を見ればこれがいつ空でないかが分かる。空であるならそのような対称対に対しては極小表現が存在しない。また Joseph イデアルの定義から A 型の群に対しては極小表現がない。さらに Vogan により次の結果が得られている。

Proposition 5.16 G を $SO_0(p,q)$ $(p+q : \text{odd} ; p, q \geq 4)$ の普遍被覆群とする。このとき G は $\operatorname{Dim} \pi = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min}$ となるような既約表現を持たない。

Proof. [1, Th. 2.13] 参照。 Q.E.D.

したがって $SO(p,q)$ $(p+q : \text{odd} ; p, q \geq 4)$ には極小表現がない。

逆にこのほかの場合は (ほとんど) すべて極小表現を持つことが知られている。以上の議論で可能性が残った対称対と、その極小表現を構成した (あるいは中心的な役割を果たした) 人たちをリストアップしてみよう。注意すべきことは極小表現の存在を論じるのとその構成をすることは微妙に違うし、あるいは表現が構成されていてもそれが極小表現であるかどうかという判定はまた別物であるという点である。(したがってリストに漏ている人がたくさんいることを忘れてはならない)

表 6 : 極小表現を持つ対称対 (G, K) 一覧

Table 6: 極小表現を持つ対称対

Cartan 分類記号	典型例 G/K	Contributers
エルミート対称対		
BDI	$SO(p,2)/SO(p)\times SO(2)$ $(p\geq 2)$	???
CI	$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$	Weil
EIII	$E_{6,2}/Spin(10)\times SO(2)$	???
EVII	$E_{7,3}/E_6\times SO(2)$	???
非エルミート対称対		
BDI	$SO(p,q)/SO(p)\times SO(q)$ $(p\geq q\geq 3)$	p : even , $q=3$: Vogan $p+q$: even Kostant, Binegar-Zierau
FI	$F_{4,4}/Sp(3)\times SU(2)$	Gross-Wallach
EII	$E_{6,4}/SU(2)\times SU(6)$	Gross-Wallach
EVI	$E_{7,4}/Spin(12)\times SU(2)$	Gross-Wallach
EIX	$E_{8,4}/E_7\times SU(2)$	Gross-Wallach
G	$G_2/SO(4)$	Vogan
EI	$E_{6,6}/Sp(4)$	Brylinski-Kostant
EV	$E_{7,7}/SU(8)$	Brylinski-Kostant
EVIII	$E_{8,8}/Spin(16)$	Brylinski-Kostant

5.3 K タイプ

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ を Cartan 分解として、記号は §4.1 のものを用いる。またこの節では対称対 G/K は極小表現を持つとする。

Theorem 5.17 G の極小表現 $(\pi_{\min}, \mathcal{H})$ を考える。$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ の $K_{\mathbb{C}}$ の表現としての最高ウェイトを ψ、最高ウェイトベクトルを X_ψ とする。また $X_{-\psi} = \overline{X_\psi}$ とおく。このとき

(1) G/K が非エルミート対称対なら、$X_{\pm\psi}$ は $\mathcal{H}$ 上局所自由に作用する。

(2) G/K がエルミート対称対ならば、X_ψ または $X_{-\psi}$ が $\mathcal{H}$ 上局所自由に作用する。

Proof. Vogan [1, Lemma 3.4] にしたがって証明する。

もし定理が成り立たないとすると $X_{\pm\psi}$ はどちらも局所自由に作用していない、したがって $\ker X_{\pm\psi}$ がある。(非エルミート対称対の場合には $X_{\pm\psi}$ は $K_{\mathbb{C}}$ 共役だから、$X_{\pm\psi}$ は同時に局所自由でなくなる。)

$\underline{X_{\pm\psi}\text{ は局所巾零に作用する。}}$実際

$$\mathcal{H}_{\mathrm{nilp}} = \{v \in \mathcal{H} \mid \exists n \text{ s.t. } X_\psi^n v = 0\}$$

とおくとこれは部分 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群となる。ところが $\ker X_\psi \neq 0$ なので $\mathcal{H}_{\mathrm{nilp}} \neq 0$、既約性より $\mathcal{H}_{\mathrm{nilp}} = \mathcal{H}$ となる。

$\underline{X_{\pm\psi} \notin \mathcal{AV}(\pi_{\min})\text{ となることを示す。}}$まず $K_{\mathbb{C}}$ 不変な有限次元部分空間 $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ を取る。$\mathcal{I}_0 = \operatorname{Ann} \mathcal{H}_0$ とおくと、これは左イデアルであって、$X_\psi^N \in \mathcal{I}_0$ $(\exists N)$ が局所巾零性より分かる。$\mathcal{J}$ を Joseph イデアルとすると、明らかに $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_0$ であるから、

$$\mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{J}) = \mathcal{O}_{\min} \supset \mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0)$$

ところで、$\mathcal{H}_0$ は $K_{\mathbb{C}}$ 不変だから、$\mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0) \subset \mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ であって、しかもこれは $K_{\mathbb{C}}$ 軌道の和である。また $\mathcal{H}$ は有限次元ではないから、$\mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0) \neq 0$ もわかる。以上から、$\mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0)$ は $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}$ の閉包 (エルミート対称対のときには $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}^+}_{\min}, \mathcal{O}^{\mathfrak{s}^-}_{\min}$ 単独か、あるいはこの二つの集合の和の閉包) となるので、特に X_ψ or $X_{-\psi} \in \mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0)$ がわかる。ところが一方では、

$$X_{-\psi} \notin (X_\psi \text{ のゼロ点}) \supset \mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0)$$

なので、$X_{-\psi} \notin \mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0)$ である。同様に $X_\psi \notin \mathcal{V}(\operatorname{gr} \mathcal{I}_0)$ もわかる。これは矛盾である。
Q.E.D.

Exercise 5.18 $(\pi, \mathcal{H})$ を $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群とし、巾零元 $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ をとる。

(1) X に対して

$$\mathcal{H}^X = \{v \in \mathcal{H} \mid \exists n \text{ s.t. } X^n v = 0\}$$

とおくと、これは部分 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 加群となることを示せ。(実際には $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ で不変であることを言うだけでよい。 [1, Lemma 3.2] 参照。)

(2) $(\pi, \mathcal{H})$ を既約とすると、巾零元 X は $\mathcal{H}$ 上局所自由に作用するか、あるいは局所巾零に作用することを示せ。

Remark 5.19 一般の Harish-Chandra 加群の随伴多様体と、ある種の巾零 Lie 環の作用の局所自由性については行者-山下の結果がある ([35])。

その結果を用いると、ハイゼンベルグ Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\Gamma} \ni X_\psi$ (注の 5.5 を見よ) の約半分の大きさの部分巾零 Lie 代数 $\mathfrak{n}$ があり、その展開環 $U(\mathfrak{n})$ が $(\pi_{\min}, \mathcal{H})$ 上局所自由に作用していることが分かる。$\mathfrak{n}$ も具体的に記述することができる (北大での講演ノート参照) が、煩雑なので今は触れない。

Exercise 5.20 $(\pi, \mathcal{H})$ を既約 Hraish-Chandra 加群とする。このとき $v \neq 0 \in \mathcal{H}$ に対して、そのゼロ化左イデアルを $\mathcal{I} = \operatorname{Ann} v = \{X \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \mid \pi(X)v = 0\}$ とおく。

$$\mathcal{V}(\operatorname{gr}\mathcal{I}) = \{0\} \iff \dim \mathcal{H} < \infty$$

であることを示せ。

Theorem 5.21 (Vogan) 極小表現 $(\pi_{\min}, \mathcal{H})$ の K タイプへの分解は重複度自由であって、つぎのように書ける。随伴多様体 $\mathcal{AV}(\pi_{\min})$ が X_ψ を含むとする。このとき、ある $K_{\mathbb{C}}$ 最高ウェイト ν が存在して、

$$\pi_{\min}\big|_K \simeq \sum_{m \geq 0}^{\oplus} \tau_{\nu + m\psi}$$

ここに τ_λ は最高ウェイトが λ の K の表現を表す。

Remark 5.22 $\mathcal{AV}(\pi_{\min}) \not\ni X_\psi$ なら (必然的にエルミート対称対の場合)、$X_{-\psi}$ をとり、正ルート系を取り直して同じことをやればよい。

Proof. だいたいの概略を述べる。

まず X_ψ は局所自由に作用することと、 $K_{\mathbb{C}}$ 最高ウェイトであることに注意せよ。$\mathcal{H}$ の K タイプを取り、その最高ウェイトを μ、最高ウェイトベクトルを v_μ としよう。このとき、$X_\psi^m v_\mu \neq 0$ であって、これは最高ウェイトが $\mu + m\psi$ の最高ウェイトベクトルである。

一方 $-\psi$ は dominant ではあり得ないので、$\mu - n\psi$ は十分大きな n に対しては最高ウェイトになり得ない。

この二つの考察から、$\exists\{\mu_i \mid i \in I\}$ があって、

$$\pi_{\min}\big|_K = \sum_{i \in I}^{\oplus} \sum_{m \geq 0}^{\oplus} \tau_{\mu_i + m\psi}$$

となることがわかる。($\mu_i = \mu_j$ $(i \neq j)$ も許していることに注意)

$\#I < \infty$ となることを示そう。

Harish-Chandra 加群 $\mathcal{H}$ の次数付けをうまく取ると、I の任意の有限部分集合 I_0 に対して

$$\sum_{i \in I_0}^{\oplus} \sum_{0 \le m \le k}^{\oplus} \tau_{\mu_i + m\psi} \subset \mathcal{H}_k$$

となるようにできる。したがって

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}_k &\ge \sum_{i \in I_0} \sum_{0 \le m \le k} \dim \tau_{\mu_i + m\psi} \\ &\ge \#I_0 \cdot \sum_{0 \le m \le k} \dim \tau_{m\psi} \end{aligned}$$

である。ところが、 Weyl の次元公式により $\Delta_K^{+,\psi} = \{\alpha \in \Delta_K^+ \mid (\psi, \alpha) \neq 0\}$ とおくと

$$\dim \tau_{m\psi} = \left(\prod_{\alpha \in \Delta_K^{+,\psi}} \frac{(\psi, \alpha)}{(\rho_K, \alpha)} \right) m^{\#\Delta_K^{+,\psi}} + (\text{lower terms}) \tag{5.1}$$

となることがわかる。$d = \#\Delta_K^{+,\psi} + 1$ と書こう。すると、k に寄らないあるゼロでない定数 C があって、

$$\dim \mathcal{H}_k \ge \#I_0 \cdot C \cdot k^d + O(k^{d-1}) \tag{5.2}$$

であることがわかる。

ところが $\operatorname{Dim} \pi_{\min} = d$ である! もしこれがわかれば、上式 5.2 において左辺も k の d 次多項式であり、結局 $\#I_0$ は上から押さえられることが分かる。一方 I_0 は任意の有限部分集合だったから、I そのものが有限集合である。

そこで $\underline{\operatorname{Dim} \pi_{\min} = d \text{ を示す}}$。

それには $d = \dim \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}$ であることを示せば十分である[22] (定理 5.13 参照)。しかし $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}$ は最高ウェイト多様体であり、その次元は演習 1.4 (3) よりちょうど d となることがわかる。

定理では $\#I = 1$ であることが主張されているが、この事実は証明が難しい。実際のところ Vogan の証明においても Case-by-Case Analysis が使われている。 Q.E.D.

5.4 随伴サイクルと Bernstein 次数

Theorem 5.23 極小表現 $\pi_{\min}$ の極小 K-type を τ_ν とする。次の条件

$$\alpha \in \Delta_K^+ \text{ に対して、} (\psi, \alpha) = 0 \Longrightarrow (\nu, \alpha) = 0 \tag{5.3}$$

が成立していると仮定する[23]。この時次が成り立つ。

[22] 非エルミート対称対の場合。エルミート対称対でも同様。

[23] この条件(5.3) はエルミート対称空間でない場合、既に知られている極小表現については成り立つ。エルミート対称対の場合にも例えば Weil 表現では成り立っている。一般に証明可能だと思う。(Open Problem)

(1) 極小表現の随伴サイクルは $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ の極小巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道を $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}$ としたとき (エルミート対称対の場合は $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}+}_{\min}$ かまたは $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}-}_{\min}$ のいずれか)、

$$\mathcal{AC}\,(\pi_{\min}) = \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}}\;(\text{重複度は } 1)$$

で与えられる。

(2) 対応する $K_{\mathbb{C}}$ 最高ウェイトを ψ とすると、 ψ は $G_{\mathbb{C}}$ の最高ルートでもあって、

$$\Delta_K^{+,\psi} = \{\alpha \in \Delta_K^+ \mid (\psi, \alpha) \neq 0\},\ \Delta^{+,\psi} = \{\alpha \in \Delta^+ \mid (\psi, \alpha) \neq 0\} = \Gamma$$

とおけば、Gelfand-Kirillov 次元 $\operatorname{Dim} \pi_{\min}$ は

$$\begin{aligned} \operatorname{Dim} \pi_{\min} &= \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\min} = \frac{1}{2} (\# \Delta^{+,\psi} + 1) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min} = \# \Delta_K^{+,\psi} + 1 \end{aligned}$$

となる。

(3) さらに Bernstein 次数は

$$\operatorname{Deg} \pi_{\min} = \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}} = (\# \Delta_K^{+,\psi})! \cdot \prod_{\alpha \in \Delta_K^{+,\psi}} \frac{(\psi, \psi)}{2(\rho_K, \alpha)}$$

と表される。

Proof. ほとんどの部分の証明は終わっている。証明すべき点は、随伴多様体がただ一つの軌道の閉包であること (ここまでは二つの軌道の閉包になる場合を排除できていなかった)、さらにその随伴サイクルにおける重複度が 1 であることの 2 点である。

しかしこの二つの事実は $\pi_{\min}$ の Bernstein 次数を計算すれば同時に解決できる。実際もし Bernstein 次数と射影多様体 $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}})$ (または $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}\pm}_{\min}})$) の次数が一致したとしよう。すると随伴サイクルは

$$\mathcal{AC}\,(\pi_{\min}) = \begin{cases} m\, \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}} & \text{非エルミート対称対の場合} \\ m^+\, \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}+}_{\min}} + m^-\, \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}-}_{\min}} & \text{エルミート対称対の場合} \end{cases}$$

と表されるから、定理 2.18 (2) により、非エルミート対称対の場合には

$$\operatorname{Deg} \pi_{\min} = m \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}} = m \operatorname{Deg} \pi_{\min} \;\therefore\; m = 1$$

がわかる。エルミート対称対の場合には射影多様体として $\overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}+}_{\min}} \simeq \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}-}_{\min}}$ であることに注意すると[24]、$\deg \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}+}_{\min}} = \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}-}_{\min}} = \operatorname{Deg} \pi_{\min}$ である。このことから

$$\operatorname{Deg} \pi_{\min} = m^+ \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}+}_{\min}} + m^- \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}-}_{\min}} = (m^+ + m^-) \operatorname{Deg} \pi_{\min} \;\therefore\; m^+ + m^- = 1$$

[24]実際この軌道は $G_{\mathbb{C}}$ の作用で移りあう。

一方、$m^{\pm}$ は非負整数なので、結局 $\mathcal{AC}(\pi_{\min}) = \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}^{\pm}}_{\min}}$ であることがわかる。

そこで $\underline{\text{Bernstein 次数が } \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}} \text{ に一致する}}$ ことを示そう。

まず $\pi_{\min}$ の K-type への分解が定理 5.21 により分かっているが、各既約成分 $\tau_{\nu+m\psi}$ がちょうど次数付けを与えていることに注意する。そこで Weyl の次元公式によってヒルベルト関数を計算すると

$$
\begin{aligned}
\dim \tau_{\nu+m\psi} &= \prod_{\alpha\in\Delta_K^+} \frac{\langle \nu + m\psi + \rho, \alpha\rangle}{\langle \rho, \alpha\rangle} \\
&= m^{\#\Delta_K^{+,\psi}} \prod_{\alpha\in\Delta_K^{+,\psi}} \frac{\langle \psi, \alpha\rangle}{\langle \rho, \alpha\rangle} + O(m^{\#\Delta_K^{+,\psi}-1})
\end{aligned}
$$

となる。ここで条件(5.3) を使った。あとはヒルベルト関数とポアンカレ級数との関係より、次数の公式が従う。また $(\psi, \alpha) \neq 0$ なら $(\psi, \psi) = 2(\psi, \alpha)$ であることに注意せよ。一方 $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}$ の方は最高ウェイト多様体なので、その関数環の $K_{\mathbb{C}}$ 加群としての分解より

$$
\mathcal{R}\left(\overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}}\right) = \sum_{m\geq 0}^{\oplus} \tau^*_{m\psi}
$$

であること、次数付けがちょうど m でなされることが分かる (定理 1.2 (3) 参照)。この式から同様にして射影多様体の次数を計算すれば、$\operatorname{Deg} \pi_{\min}$ と全く同じ式が得られ、両者は一致する。(定理 3.24 参照) Q.E.D.

6 Weil 表現 : 極小表現の例 I

Abstract

この章ではシンプレクティック群 $Sp(2n,\mathbb{R})$ の二重被覆群であるメタプレクティック群を考え、極小表現の例として Weil 表現を取り上げる。まず Weil 表現の実現を Schrödinger モデルで与え、そのあと Fock モデルによる実現と Harish-Chandra 加群を具体的に計算する。さらに定義にしたがって Weil 表現の二つの既約成分がどちらも極小表現になることを示す。Weil 表現については Weil の原論文のほか、第四回の整数論サマースクール報告集、[69], [70] などを参照されたい。また Howe による種々の dual pair の論文も役に立つだろう ([72] [74])。

6.1 シンプレクティック群とハイゼンベルグ群

W を実ベクトル空間で、非退化シンプレクティック形式 $\langle , \rangle$ を持つものとする。W の極大な**全等方的部分空間** (totally isotropic space) X, Y であって $W = X \oplus Y$ となるものが取れる。これを**極分解** (polarization) という。

$$G = Sp(W) = Sp(2n, \mathbb{R})$$

をシンプレクティック形式を不変にするような線型変換の全体とし、**シンプレクティック群**と呼ぶ。ただし $\dim W = 2n$ とおいた (必然的に偶数次元)。

Exercise 6.1 W の極大全等方的部分空間の全体を $\mathfrak{X}$ で表す。

(1) $\mathfrak{X}$ には $Sp(W)$ が推移的に作用していることを示せ。したがって $\mathfrak{X}$ には等質多様体としての構造が入る。(演習 4.4 参照)

(2) $\mathfrak{X}$ を等質多様体として具体的に表示し、$\dim \mathfrak{X}$ を求めよ。(さらに余裕があればグラスマン多様体との関係を論じよ。)

(3) 以上の考察を極分解に対して行なえ。

さらに $H = W \oplus \mathbb{R}z$ とおき、H に次のような積を定義する。

$$(w,t)\cdot(w',t') = (w+w', t+t'+\frac{1}{2}\langle w, w'\rangle) \text{ (ただし } w+tz=(w,t) \text{ などと書いた)}$$

この積で H は群となり、**ハイゼンベルグ群**と呼ばれる。

Lemma 6.2 (1) $G = Sp(W)$ は次のように H の自己同型を引き起こす。

$$g\cdot(w,t) = (gw,t)\ (g \in G, (w,t) \in H)$$

この対応により、$G \subset \operatorname{Aut} H$ とみなせる。

(2) $R = r \cdot 1_W$ をゼロでないスカラー作用素とすると R は次のような H の自己同型を引き起こす。

$$R \cdot (w,t) = (rw, r^2 t)$$

このようにして $\mathbb{R}^\times \subset \mathrm{Aut}\, H$ とみなせるが、$G \cap \mathbb{R}^\times = \{\pm 1\}$ である。

Proof. 単なる計算である。 Q.E.D.

H の既約ユニタリ既約表現 (ρ, V) を取る。中心の元はスカラーで作用するから $\rho(tz) = \psi(t) 1_V$ と $\mathbb{R}$ の乗法的一次元表現を用いて表すことができる。このとき ψ を ρ の central character と呼ぶ。

Theorem 6.3 (Stone-von Neumann) H のユニタリ既約表現 (ρ, V) は次のように分類される。

(1) central character ψ が自明なら、(ρ, V) は一次元の指標であって、$W = \mathbb{R}^{2n}$ の表現と本質的に同じ。

(2) central character が自明でなければ ψ によって (ρ, V) はユニタリ同値を除きただ一通りに決まる。

Proof. (1) は簡単。

(2) は本質的に Mackey 理論である。簡単に説明する。

A, B を簡単のためアーベル群とし、その半直積群 $H = A \ltimes B$ を考える。今の場合には $A = X$、$B = Y \oplus \mathbb{R}z$ と取ればよい。さて A は B に自己同型として作用するので、双対を取ると B の既約指標の空間 $B^\wedge$ にも作用している。Mackey 理論は次のことを主張する。

$B^\wedge/A \ni \psi$ と ψ の固定部分群 A_ψ、A_ψ の既約指標 $\varphi \in A_\psi^\wedge$ を取る。このとき $A_\psi \ltimes B$ の表現として $\varphi \boxtimes \psi$ は well-defined であり、そのユニタリ誘導表現

$$\mathrm{Ind}\,_{A_\psi \ltimes B}^{H} (\varphi \boxtimes \psi)$$

は既約である。H の任意の既約表現はこのようにして <u>一意的に</u> 得られる。

さて、我々の場合には $B^\wedge/A$ は central character ψ に対応しており、これが自明なら、$A_\psi = A$ で、(1) に相当する。自明でなければ $A_\psi = \{0\}$ となることがわかる。この場合は φ の取り方は一意的であって central character を決めると既約表現はただ一通りに決まる。
Q.E.D.

そこでいま自明でない central character ψ を一つ固定して、対応するハイゼンベルグ群の表現を (ρ_ψ, V) と書こう。さて、$g \in Sp(W)$ に対して、表現

$$\rho_\psi^g(h) = \rho_\psi(g^{-1} \cdot h)\ (h \in H)$$

を決めると $Sp(W)$ が H に中心を固定して働いていることから、この表現 ρ_ψ^g もまた同じ central character を持つ。したがってそれは ρ_ψ とユニタリ同値である。

$$\exists \omega(g) \text{ ユニタリ作用素 s.t. } \omega(g)\rho_\psi^g(h)\omega(g)^{-1} = \rho_\psi(h)\ (\forall h \in H)$$

このようにして $G = Sp(W)$ の表現空間を V に持つユニタリ射影表現 ω が構成できた。したがって ω は G の普遍被覆群の表現を定めるが、実は二重の被覆を取れば十分である。

Theorem 6.4 (Weil) 定数倍を調節することにより ω は $Sp(W)$ の二重被覆群 $Mp(W)$ のユニタリ表現を定める。この表現を **Weil 表現**、あるいは**調和振動子表現**と呼ぶ。また H の別の自明でない central character に対して同じように表現の構成を行うと互いに非同値でないものは $\psi(tz) = e^{\pm it}$ に対応する二つのみである。

Proof. 最初の主張の「表現がうまく定義できる」部分は本質的ではあるが省略する。(あとで具体的に表現を構成する。)

central character に関する主張については次のように考えればよい。R を補題 にある $\mathrm{Aut}\, H$ の元とする。すると $R\rho_\psi = \rho_{\psi \circ r^{-2}}$ であることが容易に分かる。ところが

$$\begin{aligned} g \cdot R \cdot \rho_\psi(h) &= \rho_\psi(R^{-1}g^{-1}h) \\ &= \rho_\psi(g^{-1}R^{-1}h) = g \cdot \rho_\psi(R^{-1}h) \\ &= \omega(g)^{-1}\rho_\psi(R^{-1}h)\omega(g) \\ &= \omega(g)^{-1}(R \cdot \rho_\psi)(h)\omega(g) \end{aligned}$$

だから、 $\omega(g)$ は central character $\psi \circ r^{-2}$ に対しても intertwiner になっている。したがって、 $\mathbb{R}^\times/(\mathbb{R}^\times)^2 = \{\pm 1\}$ だけの自由度しか残らない。この二つが互いに異なることは実際に構成してみれば分かる。(一方は最高ウェイト表現、他方は最低ウェイト表現となる) Q.E.D.

以下 $\psi(tz) = e^{it}$ で決まる central character に対応するもののみ考え、それを ω と記す。

6.2 Schrödinger モデル

抽象的なレベルでは Weil 表現が構成できたものの具体的にこれを捉えるには表現の作用素を具体的に書き下してみるのがよい。そこでまず H の表現 (ρ_ψ, V) を決めよう。すでに Mackey 理論で紹介したように、これは $B = Y \oplus \mathbb{R}z$ の一次元指標からの誘導なのであった。

表現空間 : $V = L^2(X) = L^2(\mathbb{R}^n) \ni f(x)$

表現の作用素 :

$$\rho((\xi, 0))f(x) = f(x+\xi)\ (x, \xi \in X)$$

$$\rho((\eta, 0))f(x) = \psi(\langle x, \eta \rangle)f(x) = e^{i\langle x, \eta\rangle}f(x)\ (\eta \in Y)$$

$$\rho((0, t))f(x) = \psi(t)f(x) = e^{it}f(x)\ (t \in \mathbb{R})$$

このとき Weil 表現の作用素は次のように与えられる。

まず P を Y を不変にするような放物型部分群とする。このとき P の Levi 部分群は X, Y を同時に不変にするような部分群となり、 $GL(n,\mathbb{R}) = GL(Y)$ に同型である。$GL(n,\mathbb{R}) \ni a \mapsto S(a) \in Sp(W)$ は W 上の線型変換として $S(a)(x,y) = ({}^t a^{-1}x, ay)$ として実現される。ただし X はシンプレクティック形式 $\langle , \rangle$ によって Y の双対空間とみなしている。

P の巾単根基は可換群となり、$b : X \to Y$ であって $\langle x, bx' \rangle + \langle bx, x' \rangle = 0$ $(x, x' \in X)$ が成り立つようなものを用いて $T(b)(x,y) = (x, y+bx)$ と定義される線型変換 $T(b) \in Sp(W)$ の全体となる。

Exercise 6.5 $W = X \oplus Y$ をシンプレクティック形式 $\langle , \rangle$ に関する極分解とする。このとき線型変換 $b : X \to Y$ であって $\langle x, bx' \rangle + \langle bx, x' \rangle = 0$ $(x, x' \in X)$ が成り立つようなものを取れば、$\langle x, bx' \rangle$ は X 上の対称な双一次形式を決めることを示せ。したがってこのような b は対称行列と同一視できる。

この P に対しては Weil 表現は非常に簡単な表示を持つ。実際

Weil 表現の作用素：

$$\omega(S(a))f(x) = \sqrt{\det a} \cdot f({}^t a x) \; (a \in GL(n,\mathbb{R}))$$

$$\omega(T(b))f(x) = \psi\left(-\tfrac{1}{2}\langle x, bx \rangle\right) f(x) \; (b : X \to Y : \text{上の性質を持つもの})$$

$\sqrt{\det a}$ はメタプレクティック群 $Mp(W)$ に対しては一価関数となっていることに注意しておく。

さらに P は極大放物型部分群なので、これを「裏返す」ような位数 2 の変換 σ に対して ω を定義しておいてやれば $Sp(W)$ 全体で定義されることになる。σ は次のように決められる。まず X の基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ と Y の基底 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ を $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ となるようにとっておき、

$$\sigma(e_i) = -f_i, \; \sigma(f_j) = e_j$$

となるようにする。このとき

$$\omega(\sigma)f(x) = \sqrt{\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n} \int_X \psi(\langle \sigma(x), \xi \rangle) f(\xi) d\xi = \sqrt{\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n} \int_X e^{i\langle \sigma(x), \xi \rangle} f(\xi) d\xi$$

と定義する。ここでも根号は「うまく」取らなければならないが詳細については省略する。

Exercise 6.6 以上のようにして定義した作用素 $\omega(g)$ はすべてハイゼンベルグ群の表現の intertwining 作用素になることを確かめよ。

Exercise 6.7 ハイゼンベルグ群の表現 $(\rho_\psi, L^2(X))$ の C^∞ ベクトル全体はちょうど急減少関数の空間 (Schwartz 空間) と一致することを示せ。

6.3 Fock モデル

目標： Weil 表現を infinitesimal に Lie 環の表現として考えてその作用を具体的に書き下す。さらに Harish-Chandra 加群を Fock モデルを用いて実現する。

前節での Weil 表現の構成は座標にあまり依存しない形で行ったが、ここでは微分表現を具体的に書き下す必要があるから次のように具体的に $G = Sp(2n, \mathbb{R})$ を実現しておく。まず標準基底として $\{f_1, f_2, \cdots, f_n, e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ を採用する (まず Y の基底があることに注意)。つまり

$$W = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$$

するとシンプレクティック形式は次の行列 σ を使って書ける。

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix},\ \langle w, w' \rangle = {}^t w \sigma w' \ (w, w' \in W)$$

さらに極大放物型部分群はブロック型の上半行列となり、

$$P \ni S(a)T(b) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_n & b \\ 0 & 1_n \end{bmatrix} \ (a \in GL(n, \mathbb{R}), b \in Sym(n, \mathbb{R}))$$

と表示される。

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ を Schwartz 空間とする (演習 6.7 参照)。この空間には Weil 表現の微分として $G = Sp(2n, \mathbb{R})$ の Lie 環の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ が働くが、その作用を書き下してみる。

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= \left[\begin{array}{c|c} E_{i,j} & 0 \\ \hline 0 & -{}^t E_{i,j} \end{array}\right] \longmapsto x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\delta_{i,j} \\
B_{i,j} &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & E_{i,j} + E_{j,i} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \longmapsto -\sqrt{-1}\, x_i x_j \\
C_{i,j} &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline E_{i,j} + E_{j,i} & 0 \end{array}\right] \longmapsto -\sqrt{-1}\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

ここで $E_{i,j}$ は (i,j) 成分だけが 1 であるような行列単位を表す。また $X \ni \sum x_i e_i$ を座標表示とした。

Exercise 6.8 Weil 表現 ω の微分表現を具体的に計算せよ。このうち $A_{i,j}, B_{i,j}$ については表現の定義式を直接微分して計算できる。$C_{i,j}$ については

$$\mathrm{Ad}\,\sigma(B_{i,j}) = -C_{i,j},\ \sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix}$$

であることと σ の作用、つまりフーリエ変換により多項式を掛けることと微分をすることが互いに入れ代わることに注意すればわかる。

このままでは極大コンパクト群 K の作用が見難いので更にちょっと工夫をする (例えば [77, § III.2.1] を見よ)。以下のような表現の実現方法は **Fock type の実現**と呼ばれる。それに対して今までやってきたような L^2 関数による実現を **Schrödinger type の実現**と呼ぶ。

$$a_i = (x_i - \partial/\partial x_i)\,,\ a_i^* = (x_i + \partial/\partial x_i)$$

と書こう。このとき $v = \exp(-|x|^2/2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、写像 Φ を次のように定義する。

$$\Phi : \mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n] \ni p(a_1, \cdots, a_n) \longmapsto p(a_1, \cdots, a_n)v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

a_i^* は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に微分作用素として自然に作用しているが、この作用を Φ で引き戻すと、

$$a_i^* v = 0, \quad [a_i^*, a_j] = 2\delta_{i,j}$$

だから、 a_i^* は $\mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n]$ に $2\partial/\partial a_i$ として働く。以下 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の作用を $\mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n]$ 上の微分作用素として書き下してみよう。

まず $K \simeq U(n)$ を次のように実現しておく。

$$K = \left\{ \left[\begin{array}{cc} A & B \\ -B & A \end{array} \right] \middle| \ A + iB \in U(n) \right\}$$

Cartan 対合 θ を $\theta(x) = -{}^t x\ (x \in \mathfrak{g})$ または $\theta(g) = {}^t g^{-1}\ (g \in G)$ として、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ を Cartan 分解とすれば $\mathfrak{s}_\mathbb{C}$ には K が adjoint で作用している。 $\mathfrak{s}_\mathbb{C}$ は K の表現として既約ではなく、二つの既約成分 $\mathfrak{s}^\pm$ に分解する。つまり $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{s}^- \oplus \mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{s}^+$ となっている。

$\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ の生成元は

(1) $A_{i,j} - A_{j,i}\ (i \neq j)$ と

(2) $B_{i,j} - C_{i,j}$ の二通り。

(1) の場合、引き戻した多項式環 $\mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n]$ 上の作用は次のようになる。

$$\begin{aligned} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{a_i + a_i^*}{2} \cdot \frac{a_j^* - a_j}{2} \quad \text{だから} \\ x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{1}{2}(a_i a_j^* - a_i^* a_j) \leftrightarrow a_i \frac{\partial}{\partial a_j} - \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) a_j \end{aligned}$$

(2) の場合、$B_{i,j} - C_{i,j}$ を引き戻すと、同様な計算で

$$-\sqrt{-1}\left(x_i x_j - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) \leftrightarrow -\sqrt{-1}\left(a_i \frac{\partial}{\partial a_j} + \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) a_j\right)$$

(1), (2) より結局 $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ の生成元として多項式環上の微分作用素

$$a_i \frac{\partial}{\partial a_j} + \frac{1}{2}\delta_{i,j}$$

がとれることがわかる。この微分作用素たちは $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ を生成するが、 1/2 で “繰り込まれている”(renormalized) ことに注意せよ。また $\mathfrak{k}$ の中心の元は (標準的にとれば)

$$-\sqrt{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial a_j} + \frac{n}{2}\right)$$

に対応している。

$\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ の生成元は

(3) $A_{i,j} + A_{j,i}$ と
(4) $B_{i,j} + C_{i,j}$ の二通り。

(3) の場合 :

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \leftrightarrow -\frac{1}{2} a_i a_j + 2 \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}$$

(4) の場合 :

$$-\sqrt{-1}\left(x_i x_j + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) \leftrightarrow -\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2} a_i a_j + 2 \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\right)$$

となるから $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ の生成元として

$$a_i a_j, \quad \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}$$

がとれることがわかる。ここで $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ のウェイトを考えれば結局

$$\mathfrak{s}^- \Longleftrightarrow \{a_i a_j\}, \qquad \mathfrak{s}^+ \Longleftrightarrow \left\{\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\right\} \tag{6.1}$$

となっていることがわかる。あるいはより詳しく、ルートベクトルの作用を書くと

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} & = & \sqrt{-1} a_i a_j \\ X_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} & = & \sqrt{-1} \partial_i \partial_j \end{array}\right. , \qquad X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = a_i \partial_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

となっている。

以上をまとめると

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \supset \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] e^{-|x|^2/2} \\ = \Phi\left(\mathbb{C}[a_1, \cdots, a_n]\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

であって $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] e^{-|x|^2/2}$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群になることがわかる。もちろんこの作用を引き戻して $\mathbb{C}[a_1, \cdots, a_n]$ も同型な $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群である。

Lemma 6.9 $Mp(2n,\mathbb{R})$ の Weil 表現 $(\omega, L^2(\mathbb{R}^n))$ の Harish-Chandra $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群は n 変数多項式環 $\mathbb{C}[a_1,\cdots,a_n]$ に同型である。作用は上で計算したように与えられる。

Theorem 6.10 (1) Weil 表現 $(\omega, L^2(\mathbb{R}^n))$ は二つのユニタリ既約表現の直和であって、その二つの既約成分を $(\omega^\pm, L^2(\mathbb{R}^n)^\pm)$ と書くと、$L^2(\mathbb{R}^n)^\pm$ はそれぞれ偶関数および奇関数の空間である。またユニタリ内積は通常の L^2 内積で与えられる。
(2) $(\omega^\pm, L^2(\mathbb{R}^n)^\pm)$ の K タイプへの分解は重複度自由であって、具体的には次のようになる。

$$(\omega^+, L^2(\mathbb{R}^n)^+) \simeq \sum_{m\geq 0}^{\oplus} \tau_{\mathbb{I}/2+2m\varepsilon_1} \tag{6.3}$$

$$(\omega^-, L^2(\mathbb{R}^n)^-) \simeq \sum_{m\geq 0}^{\oplus} \tau_{\mathbb{I}/2+(2m+1)\varepsilon_1} \tag{6.4}$$

ただし $\mathbb{I} = (1,1,\cdots,1), \varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0)$ であって、τ_λ は $\widetilde{K} \simeq U(n)^\sim$ ($U(n)$ の二重被覆群) の最高ウェイト λ の有限次元既約表現である。

Proof. 証明はすべて終わっている (はずだ)。うーむ。 Q.E.D.

特に K タイプへの分解に注目すると、この場合 $\nu = \mathbb{I}/2$ または $\nu = \mathbb{I}/2 + \varepsilon_1$ であって $\psi = 2\varepsilon_1$ は最高ルートであることに注意しておく。(記号は定理 5.21 参照)

6.4 極小表現としての Weil 表現

Theorem 6.11 (1) $Sp(2n,\mathbb{R})$ の極小表現は二重被覆の表現であり、ちょうど 4 つある。それらは Weil 表現の既約成分であって、特にユニタリ表現である。
(2) 極小表現 $\omega^\pm$ はどちらも同じ随伴サイクルを持ち、$\mathcal{AC}(\omega^\pm) = \overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}^+}_{\mathrm{min}}}$ である。また $\mathrm{Dim}\,\omega^\pm = n,\ \mathrm{Deg}\,\omega^\pm = 2^{n-1}$ が成り立つ。

Proof. Weil 表現が極小表現であることを確認しよう。それには次の二点を確認すれば十分である。

- 随伴多様体が $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}^+}_{\mathrm{min}}$ であること。
- 原始イデアルが completely prime であること。

しかもこれを個々の $\omega^\pm$ ではなく、 Weil 表現そのものについて行えばよい。(理由は各自考えよ。)

まず随伴多様体であるが、次数付けを多項式の次数 $\times 2$ で行うことができて、それによると $\mathfrak{s}^-$ は $\mathrm{gr}\,V$ の annihilator に入ることが分かる。また定義から $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ も annihilator に入っている。したがって随伴多様体は $\mathfrak{s}^+$ に含まれる。

次に表現の具体形を見ると、$X^2_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} - X_{2\varepsilon_i}X_{2\varepsilon_j} \in \mathrm{Ann}\,(\mathrm{gr}\,V)$ であることが容易に分かる。これらの多項式で消えるものはちょうど対称行列 $(= \mathfrak{s}^+)$ の中で階数が 1 のものと同一視でき、最低次元の軌道がこのような determinatal variety になることはよく知られている。

次に原始イデアルについて。これは表現の作用素が生成する代数が $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\mathcal{I}$ であることと、その具体形から、多項式環上の微分作用素でその代数が表されること、さらに Weyl 代数が整域であることより明らかである。

Gelfand-Kirillov 次元、 Bernstein 次数についてはすでに公式があるので機械的にそれを適用すればよい (もちろん直接計算もできる)。 Q.E.D.

Exercise 6.12 Weil 表現 $\omega^{\pm}$ の Gelfand-Kirillov 次元が n であることを直接示し、このことと、軌道の次元の情報から随伴多様体が $\overline{\mathcal{O}_{\min}^{\mathfrak{s}^{+}}}$ であることを結論せよ。

Weil 表現は dual pair を用いた表現の theta 対応、あるいは保型形式の theta lifting など豊かな理論が展開する場を提供している。一般に極小表現はこのような場を提供することが期待される。表現論への dual pair の応用は数多いが、例えば [82] を参照して欲しい。

7 不定符号直交群の極小表現：極小表現の例 II

Abstract

この節では $G = SO_0(p,q)$ を考え (p,q については後で著しい制限を加える)、その極小表現を構成する。その方法は主に Kostant によって建設され、Binegar-Zierau によって見通しよく整備された。また Ørsted-小林 による研究もある。

方針としては、ある特別な退化主系列を幾何的に構成し、その部分表現を調和関数として取り出す。するとそれが極小表現になるというものである。このやり方は derived functor module による既約表現の構成とよく似ている。またこの場合は非エルミート対称対だが、ほかの非エルミート対称対の場合にも似たような方法が適用できることが Brylinski-Kostant によって報告されている。

7.1 退化主系列表現

$M = \mathbb{R}^{p+q} = E \oplus F, E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^q$ とする。M 上の不定値二次形式 Q を

$$Q(x+y) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q} y_j^2 = R_E - R_F \tag{7.1}$$

と書くことにする。(二次形式と二次の多項式を混同しているが、許されたい)

二次形式 Q を不変にするような (不定値) 直交群 $O(Q) = O(p,q)$ を考える。以下その単位元の連結成分 $G = SO_0(p,q)$ の極小表現を考える。簡単のために $0 \leq p \leq q$ としよう。

よく知られているように極大コンパクト部分群は $K = SO(p) \times SO(q)$ である。この場合 G の実ランクは p であって (したがって $p = q$ のときに split /$\mathbb{R}$)、岩澤分解は次のようになる。

$$G = KAN$$

$$K = \begin{bmatrix} SO(p) & \\ & SO(q) \end{bmatrix}$$

$$A = \exp \mathfrak{a},\ \mathfrak{a} = \left\{ a = \begin{bmatrix} 0 & d(a) \\ d(a) & 0 \end{bmatrix} \mid d(a) = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_p) \right\}$$

N : 記述困難 (笑)

$\mathfrak{a}$ のルートを

$$\Lambda = \begin{cases} \{\pm\lambda_i \pm \lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq p\} & (p = q) \\ \{\pm\lambda_i \pm \lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{\pm\lambda_i \mid 1 \leq i \leq p\} & (p < q) \end{cases}$$

とする。ここに $\lambda_i(a) = a_i$ で、$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ とみなしている。標準的に正ルートを取ると最高ルートは $\psi = \lambda_1 + \lambda_2$ で、これは通常の (restricted でない) ルートでもある。さらに単純ルート

系は

$$\Pi = \begin{cases} \{\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \mid 1 \le i \le p-1\} \cup \{\alpha_p = \lambda_{p-1} + \lambda_p\} & (p = q) \\ \{\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \mid 1 \le i \le p-1\} \cup \{\alpha_p = \lambda_p\} & (p < q) \end{cases}$$

さて $C = (Q$ のゼロ点$)$ を光錐とし、その (実) 射影化を $X = \mathbb{P}(C)$ と書く。また $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$ に対応する実極大放物型部分群を P とおく。つまり $P = M_P A_P N_P$ とすると A_P は一次元で、M_P ルートは $2 \le i < j \le p$ に対応するルートたちになっている。また

$$K \cap M_P = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \varepsilon & \\ & O(p-1) \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} \varepsilon & \\ & O(q-1) \end{matrix} \end{array}\right] \subset K \; \varepsilon = \pm 1$$

$$N_P \leftrightarrow \{\lambda_1 \pm \lambda_j \mid 2 \le j \le p\} \quad (\cup \{\lambda_1\})$$

Lemma 7.1 X は G 等質多様体で、等質多様体として $X \simeq G/P$ となる。

Proof. X に G が推移的に働くことは見やすい。あとは $v_1 = \mathrm{diag}\,(1, 0, \cdots, 0; 1, 0 \cdots, 0)$ の固定部分群が P であることを確かめればよい。 Q.E.D.

Remark 7.2 $v_1 \in M$ はこの場合「最高ウェイトベクトル」であって、$C^\times = C \backslash \{0\}$ は (実) 最高ウェイト多様体になることに注意せよ (もっとも軌道は二つに分かれるが)。X はその射影化である。

X 上の直線束 L は P の適当な一次元表現 $\chi = \chi(\delta, \nu)$ $(\delta = 0, 1; \nu \in \mathbb{C})$ に対応して G 主束の構造を持つ。つまり $L_\chi = G \times_P \mathbb{C}_\chi$ と表せる。 ただし χ は P の一次元表現で、

$$\chi(man) = \varepsilon(m)^\delta a^\nu$$

である。

このとき切断の空間 $\Gamma(L_\chi)$ には自然に G の作用が定義でき、表現となるが、表現論の言葉を使うとこの空間は退化主系列表現の空間 $\mathrm{Ind}\,_P^G \chi$ である。特に C^∞ バージョンを考えると

$$\mathrm{Ind}\,_P^G \chi = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \varphi(gman) = \varepsilon(m)^\delta a^{-\nu} \varphi(g)\}$$

と

$$\Gamma(L_\chi) = \{\varphi : C^\times \to \mathbb{C} \mid \varphi(ax) = (\mathrm{sgn}\, a)^\delta |a|^{-\nu} \varphi(x) \quad (x \in C^\times, a \in \mathbb{R}^\times)\}$$

が同一視される。

極小表現はある特別な一次元表現 χ に対して、この $\Gamma(L_\chi)$ の調和関数のなす部分空間として構成される。

Remark 7.3 あまり厳密でないが、なぜこのようにして極小表現を構成するかという理由を述べる。まず極小軌道の次元を見れば $\mathrm{Dim}\,\pi_{\min} = p+q-3$ とならなければいけないことが分かる。そこで理想的には $\pi_{\min}$ の表現空間として、$\dim = p+q-3$ の多様体上の関数空間を取りたい。ここで上の退化主系列の場合に次元を見てみると、次のようになるだろう。

$$
\begin{array}{cl}
C\ (\text{光錐}) & \dim = p+q-1 \\
\Downarrow & \text{射影化} \\
X = \mathbb{P}(C) & \dim = p+q-2 \\
\Downarrow & \ker\Delta(\text{微分方程式の解空間}) \\
? & \dim = p+q-3
\end{array}
$$

$X = \mathbb{P}(C)$ の上の関数空間を少し捻って直線束の切断を取ったのが退化主系列の空間。そこでさらに調和関数の空間を考える (微分方程式で次元を一つ落とす) 事で、表現空間を得ようとしている。

7.2 ラプラシアンの核空間

$k \in \mathbb{Z}$ に対して $\delta = (1-(-1)^k)/2$ とおき、$\chi = \chi(\delta; -k)$ ととる。また切断、誘導表現のカテゴリーは C^∞ ではなく、<u>代数的なもの</u>を考えることとする。このとき $\Gamma(L_\chi) = \Gamma^k$ は

$$\Gamma^k = \{\varphi \in \mathcal{R}\left(C^\times\right) \mid \varphi(ax) = a^k\varphi(x)\}$$

となっている。そこで C を含む錐 D で、$M = \mathbb{R}^{p+q}$ で開になっているものを取り、

$$\Gamma^k(D) = \{\varphi \in \mathcal{R}\left(D^\times\right) \mid \varphi(ax) = a^k\varphi(x)\ (x \in D^\times, a \in \mathbb{R}^\times)\}$$

と定義しておこう (つまり D は C の錐状近傍)。

$M = E \oplus F$ 上のラプラシアン[25] $\Delta = \Delta_{p,q}$ を

$$\Delta = \Delta(E) - \Delta(F) = \partial Q$$

で定義する。またオイラー作用素を

$$I = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ (n = p+q,\ x_{j+p} = y_j)$$

と書く。

Lemma 7.4 次の等式が成り立つ。

$$[I, Q] = 2Q,\ [I, \Delta] = -2\Delta,\ [\Delta, Q] = 4(I + (p+q)/2)$$

特に $\varphi \in \Gamma^k$ に対して

$$\Delta Q\varphi = Q\Delta\varphi + 4(k + \frac{p+q}{2})\varphi$$

[25] ダランベルシアン?

Proof. routine work Q.E.D.

以下 $\underline{p+q}$ を偶数と仮定する。この仮定は極小表現を構成する上で本質的である。

Lemma 7.5 $\Delta : \Gamma^k(D) \to \Gamma^{k-2}(D)$ が成り立つ。さらに $k = 2-(p+q)/2$ に対して $f(x) \in \Gamma^k(D)$ かつ $f(x) = 0$ $(x \in C)$ なら

$$\Delta f\big|_{C^\times} = 0$$

が成り立つ。

Proof. $dQ \neq 0$ だから、 $f = 0 \Leftrightarrow f = Q\varphi$ と書けている (Hilbert の零点定理)。$\varphi \in \Gamma^{k-2}$ に注意せよ。したがって

$$\Delta Q\varphi = Q\Delta\varphi + 4(k-2+\frac{p+q}{2})\varphi = Q\Delta\varphi$$

C 上では $Q = 0$ なので $\Delta f\big|_{C^\times} = 0$ がわかる。 Q.E.D.

この補題により $f(x)$ を $C^\times$ から D へどのように (代数的に) 拡張しても $k = 2-(p+q)/2$ なら $\Delta f\big|_{C^\times}$ は拡張の仕方に依らないことが分かる。特に $\mathcal{H} = \ker\Delta \subset \Gamma^{2-(p+q)/2}$ は well-defined である。また Δ は明らかに G 不変であるから、 $\mathcal{H} = \ker\Delta \subset \Gamma^{2-(p+q)/2}$ は G 不変な部分空間であって、 G の表現が定義される。この表現を $(\pi, \mathcal{H})$ と書くことにしよう。これが極小表現になることを示すのが以下の目標である。

7.3 K タイプと球面調和関数

まず古典的な球面調和関数の理論を復習する。

Lemma 7.6 S^{p-1} を $p-1$ 次元球面とすると、$SO(p)$ が自然に $L^2(S^{p-1})$ に働いている。

(1) $SO(p)$ の表現として $L^2(S^{p-1})$ は重複度自由であり、

$$L^2(S^{p-1}) \simeq \sum_{m\geq 0}^{\oplus} \tau_{m\lambda_1}$$

と分解される。ただし λ_1 は $SO(p)$ の $\mathbb{C}^p$ 上の自然な表現の最高ウェイトである。

(2) 各既約成分 $\tau_{m\lambda_1}$ は m 次の調和多項式を球面へ制限したもの全体が張るベクトル空間に一致する。特に (適当に正ルートを取れば) $(x_1+ix_2)^m$ を球面に制限したものは $\tau_{m\lambda_1}$ の最高ウェイトベクトルになる。

Proof. アプローチの仕方は二つある。

一つは最高ウェイト多様体の理論を使うこと (本質的には Borel-Weil である)。もう一つは $SL(2,\mathbb{R})$ との間の dual pair の理論を用いること。もちろん古典的な調和関数の理論に帰着することも可能である。

これについては例えば [83, § 9.3], [77] を参照して欲しい。また $p = 3$ のときには古典的な球面調和関数の理論で良く知られている。例えば [84, § 4] を見よ。 Q.E.D.

以下 $E = \mathbb{R}^p$ 内の単位球面を S_E、$F = \mathbb{R}^q$ のそれを S_F と書く。

Lemma 7.7 $S_E \times S_F \to X$ は $2:1$ の被覆写像である。

Proof. 明らか。この被覆写像を通して、X 上の関数は $S_E \times S_F$ 上の関数とみなすことができる (し、そうする)。 Q.E.D.

さて Γ^k を $K = SO(p) \times SO(q)$ の表現とみなして既約分解することは、$L^2(X)$ を K の表現として分解することに相当する。一方すでに $L^2(S_E \times S_F) = L^2(S_E) \boxtimes L^2(S_F)$ の分解は分かっているから、これを利用することにしよう。

Lemma 7.8 K の表現として Γ^k は重複度自由であって、次のように分解する。

$$\Gamma^k \simeq \sum_{\substack{l+m \equiv k \pmod 2 \\ l,m \geq 0}}^{\oplus} \tau_{l\lambda_1} \boxtimes \tau_{m\lambda_{p+1}}$$

Proof. $S_E \times S_F$ 上の関数が X 上の関数に落ちるためには、ファイバーの上で同じ値を取っている必要がある (パリティ条件)。これを書き下してみる。$\tau_{l\lambda_1} \boxtimes \tau_{m\lambda_{p+1}}$ に含まれる関数はもともと $l + m$ 次式であるから $(-1)^{l+m} = (-1)^k$ が成り立っていることが必要十分となる。 Q.E.D.

以下 $k = 2 - (p + q)/2$ として話を進める。また話の都合上 <u>p, q は偶数</u> と仮定する[26]。

Theorem 7.9 $k = 2 - (p + q)/2$ かつ p, q は偶数とする。このとき $\Delta_{p,q}$ 調和関数の空間 $\mathcal{H} \subset \Gamma^k$ は K の表現として重複度自由であり、次のように分解する。

$$\mathcal{H} \simeq \sum_{m \geq 0}^{\oplus} \tau_{(m+(q-p)/2)\lambda_1} \boxtimes \tau_{m\lambda_{p+1}}$$

これが G の表現 $(\pi, \mathcal{H})$ の K タイプへの分解を与えている。

Proof. しばらくの間 $\mu = \lambda_1$、$\nu = \lambda_{p+1}$ とおく。

まず球面調和関数を Γ^k の関数として $M^\times = \mathbb{R}^{p+q} \backslash \{0\}$ へ拡張しよう。それには光錐上では $R_E = R_F$ であったことを思いだし ((7.1) 参照)、$f(x) \in \tau_{l\mu}$ および $g(y) \in \tau_{m\nu}$ に対して

$$F(x, y) = R_E^d f(x) g(y) \; (2d = k - (l + m))$$

とおく。いま $k - (l + m) \equiv 0 \pmod 2$ なので d は整数になることに注意しておく。すると明らかに $F(x, y) \in \Gamma^k$ は x, y の多項式 ($1/R_E$ の因子を除いて) である[27]。また作り方から明らかに、$F(x, y)\big|_{S_E \times S_F} = f(x)g(y)$ が成り立つ。

[26] 必ずしもこの仮定は必要なく、先に述べたように $p + q$ が偶数であることが本質的である。

[27] したがって $F(x, y)$ は厳密には $M^\times$ 上の関数ではなく、M から $R_E = 0$ を除いた開集合上で定義されている。これが先にでてきた錐状近傍 D である。

そこで $\Delta F(x,y)$ を計算してみる。まず $\Delta f(x)g(y) = 0$ に注意して、次の補題を用意する。

Lemma 7.10 I_E を E におけるオイラー作用素とする。このとき

(1) $[\Delta, R_E] = 4(I_E + p/2) =: 4H_E$

(2) $[\Delta, R_E^d] = 4dR_E^{d-1}(H_E + (d-1))$

Proof. 演習問題とする。 Q.E.D.

この補題を使うと

$$
\begin{aligned}
\Delta F(x,y) &= \Delta R_E^d f(x)g(y) \\
&= R_E^d \Delta f(x)g(y) + [\Delta, R_E^d] f(x)g(y) \\
&= 0 + 4dR_E^{d-1}((I_E + p/2) + (d-1))f(x)g(y) \\
&= (k-(l+m))(2l+p+k-(l+m)-2)R_E^{d-1}f(x)g(y)
\end{aligned}
$$

と計算できる。ただし $2d = k-(l+m)$ であることを用いた。さらに $k = 2-(p+q)/2$ であったことに注意すると上の式は

$$(2-(p+q)/2-(l+m))(l-m-(q-p)/2)R_E^{d-1}f(x)g(y)$$

と計算できる。最初の因子はゼロではないので、結局これが "消滅" するには

$$l = m + \frac{q-p}{2}$$

が必要十分であることが分かる。 Q.E.D.

7.4 極小表現

上で構成した表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が極小表現になることを示す。

Theorem 7.11 $(\pi, \mathcal{H})$ は既約表現であって、

(1) $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ 不変な内積を持つ。つまり対応する G の表現はユニタリである。

(2) 原始イデアルは Joseph イデアルに一致する。したがって $(\pi, \mathcal{H})$ は極小表現である。

ここでは G が split している場合 $(p = q)$ に既約性を証明するに留めよう。実はこの既約性の証明方法はユニタリ内積を定義するときにも役に立つし、原始イデアルが Joseph イデアルであることを判定するのにも役に立つのだが、それについては [4] [3] [5] を参照されたい。

split しているときには $(\pi, \mathcal{H})$ は spherical 、つまり K の自明な表現を含むことに注意する。この自明な表現のゼロでないベクトルを $\mathbf{1}$ と書くと、それを $M^\times$ に延長したものは $R_E^{1-p/2}$ となる (我々はいま p を偶数と仮定していることに注意せよ)。

Theorem 7.12 ψ を最高ルートとして $X_\psi \in \mathfrak{s}_\mathbb{C}$ を最高ルートベクトルとする。このとき $X_{-\psi}^n X_\psi^n \mathbf{1}$ の K 不変成分は

$$X_{-\psi}^n X_\psi^n \mathbf{1} = \lambda \mathbf{1} + (\text{残りの成分}),$$

ここに λ は $a = \dfrac{p}{2} - 1$ とおいて、

$$\lambda = \frac{n!}{\binom{a+n}{a}}(-a; n) \quad (\text{ただし } (s; n) = s(s-1)\cdots(s-n+1))$$

で与えられ、特にゼロではない。

Proof. まず最高ルートベクトルを具体的に計算し、$X_{\pm\psi}$ を微分作用素で表わそう。そのために座標系を

$$\begin{cases} E \simeq \mathbb{C}^p \text{ の座標:} & (x_1, \dots, x_p) \\ F \simeq \mathbb{C}^q \text{ の座標:} & (y_1, \dots, y_q) \end{cases}$$

と取る。さらに

$$\begin{cases} z_1 &= x_1 + i x_2 \\ w_1 &= y_1 + i y_2 \end{cases} \quad \text{とおくと、} \quad \begin{cases} X_\psi &= \overline{z_1}\dfrac{\partial}{\partial w_1} + \overline{w_1}\dfrac{\partial}{\partial z_1} \\ X_{-\psi} &= z_1 \dfrac{\partial}{\partial \overline{w_1}} + w_1 \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_1}} \end{cases}$$

と表せる。(確かめよ。)

次にこの微分作用素 $X_{\pm\psi}$ を $\pi_{\min}\big|_K \ni \mathbf{1} = R_E^{1-p/2}$ に作用させたものを具体的に計算する。これは少し一般的にやっておこう。

Lemma 7.13 $R_E = x_1^2 + \cdots + x_p^2$ とし、微分作用素 $X_{\pm\psi}$ を上のように与える。このとき $d \in \mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ。

(1) $X_\psi^n R_E^d = (d; n) R_E^{d-n} (\overline{z_1 w_1})^n$

(2)

$$X_{-\psi}^n X_\psi^n R_E^d = R_E^{d-2n} \sum_{\substack{0 \le s+t \le n \\ 0 \le s, t}} (d; 2n - (s+t)) \frac{n!}{(n-(s+t))!} \binom{n}{s}\binom{n}{t} |z_1|^{2(n-s)} |w_1|^{2(n-t)} R_E^{s+t}$$

ただし $(s; n) = s(s-1)\cdots(s-n+1)$ と書いた。

$X_{-\psi}^n X_\psi^n R_E^d$ を球面上で積分すると、球面調和関数の定数 (自明な表現) 以外の部分は全て消滅するから、これで定数部分の係数が具体的に計算される。つまり、

$$\int_{S_E \times S_F} X_{-\psi}^n X_\psi^n R_E^d d\mu = \lambda \quad (d = 1 - p/2)$$

である。この積分には次の演習問題を使うとよい。

Exercise 7.14 S_E を $x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1$ で定義された単位球面とし、$d\mu$ を球面上の正規化された回転不変測度とする。$z_1 = x_1 + ix_2$ とおくと、次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_{S_E} |z_1|^{2m} d\mu = \binom{\frac{p}{2} - 1 + m}{m}^{-1}$$

これを使っても定理の形に λ が書けることは級数の公式などを開発する必要があるが、それについては割愛する (時間がないので、将来的には補います)。 Q.E.D.

一般論から $X_\psi^n \mathbf{1}$ は各 K タイプの最高ウェイトベクトルであることが分かり、結局この定理より各 K タイプは表現を生成することが判明した。したがって $(\pi, \mathcal{H})$ は既約である。

ユニタリ性については、不変な正値内積が入ることを示せばよい。しかし不変性より、内積は一意的に決まってしまうので、結局正値性を示せばよい。それには内積の K 最高ウェイトにおける値を計算すれば良いが、それは上で計算した $X_{-\psi}^n X_\psi^n \mathbf{1}$ の係数そのもである。これが正値であるから、内積は常に正値になる。

問題は原始イデアルが Joesph イデアルになることであるが、これは Garfinkle の 2 次の斉次元による Joseph イデアルの特徴付けが必要となる。これについてはまたの機会に譲りたい。

8　極小表現とは何か?

極小表現の持っているユニークな性質を列挙してみよう。これを見れば極小表現が決して特殊な袋小路的な理論ではないことが実感できる。

(以下、最小性とか極小性はゼロ、有限次元表現、自明な場合を除いてのもの。)

- 原始イデアルが Joseph イデアルである。結果として無限小指標が決まり、そのような表現は有限個しかない。
- Gelfand-Kirillov 次元が最小。
- 随伴多様体が極小巾零軌道。さらに随伴サイクルは重複度が 1 (一つの軌道の閉包のみ)。
- ユニタリ表現であって、ほとんどの場合ユニタリ双対の中で孤立している。orbit method によるユニタリ表現の分類を考えたとき、巾零軌道に対応するような (少数の) 表現のうちの一つで、定まった述語ではないものの、ユニポテント表現とみなせる。
- 誘導表現では表されない。これも orbit method との関係から重要な性質である。
- dual pair の理論を内包し、その pair への分解によって豊富な情報を提供する。これは古典群の定義表現の tensor 積の分解が豊富な表現論 (あるいは不変式論) の舞台を提供することと似ている。
- K タイプへの分解は重複度自由であり、その分布は半直線状 (pencil と呼ばれる) である。重複度自由であることは dual pair への制限が具体的に書き下せることの理論的な裏付けを与える。
- ほとんどの場合保型表現である (例外もある)。

極小表現についてはかなりのことが分かっているが、将来の課題としては、次のようなことがあげられる。

- dual pair を具体的に決定し、テータ対応を記述すること。

  dual pair については Lie 代数のレベルでは例えば Rubenthaler による分類がある。しかし例えば $SO(4,4) \supset G_2 \times \mathfrak{S}_3$ の例のように、Lie 代数のレベルでは記述できないような興味深い例が報告されていることを思い出すべきである。

  またテータ対応の研究については始まったばかりだと思う。

- 表現の実現を様々な方法で具体的に与えること。これは特に例外型群で望まれる。

  表現の構成はすでに注意したようにすべてのタイプで終わっているが、例えばほかに極小表現は存在しないのかなどといった問いにはまだ答えられていない。

  さらに Weil 表現の場合のように簡便な記述が何通りも存在するという状態ではなく、さらに便利な記述が望まれる。現在のところ利用可能なのは主に K タイプの分布に関する情報と X_ψ の作用ぐらいである。(もちろん理論的にはこれだけあれば決まるのだが、応用的には十分ではない)

- 指標を求めること。これについては Adams の仕事がある。

- 極小表現の定義を Joseph イデアルを使わないで行うことは意味があると思う。実際極小表現を持たないとされているケースでも明らかに「これこそが極小表現であるべきだ」という表現は存在するので、そのような表現を特徴づけることは実数体上の代数群の表現を研究する場合には不可欠となるだろう。試みに、「随伴サイクルが $[\overline{\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}_{\min}}]$ (重複度は 1) であって、原始イデアルが completely prime」というのではどうかと考えている。[28]

[28] 重複度が 1 であること、原始イデアルが completely prime、Goldie rank が 1 である、という 3 つの条件はかなり近いと思われる。

References

- 極小表現

[1] D. Vogan, Singular unitary representations. In *Non commutaive harmonic analysis and Lie groups, LNM* **880**(1981), pp. 506 – 535.

[2] D. A. Vogan, Jr., The unitary dual of G_2. Invent. math., 116 (1994), 677 – 791.

[3] B. Kostant, The vanishing scalar curvature and the minimal unitary representation of $SO(4,4)$. In *A. Connes et al. (eds.), Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, PM* **92***, Birkhäuser, 1990*, pp. 85 – 124.

[4] B. Kostant, The principle of triality and a distinguished unitary representation of $SO(4,4)$. In *K. Bleuler and M. Werner (eds.), Differential Geometrical Methods in Theoretical Physics, Kluwer Academic Publ., 1988*, pp. 65 – 108.

[5] B. Binegar and R. Zierau, Unitarization of a singular representation of $SO(p,q)$. *Comm. Math. Phys.*, **138**(1991), 245 – 258.

[6] T. Kobayashi and B. Ørsted, Conformal geometry and branching laws for unitary representations attached to minimal nilpotent orbits. Preprint, 1997.

[7] B. H. Gross and N. R. Wallach, A distinguished family of unitary representations for the exceptional groups of real rank = 4. In *J.-L. Brylinski et al. (eds.), Lie Theory and Geometry – In Honor of Bertram Kostant, PM 123, Birkhäuser, 1994*, pp. 289 – 304.

[8] B. H. Gross and N. R. Wallach, On quaternionic discrete series representations and their continuations, J. Reine Angew. Math., **481**(1996), 73 – 123.

[9] R. Brylinski and B. Kostant, Minimal rperesentations of E_6, E_7 and E_8 and the generalized Capelli identity. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **91**(1994), 2469 – 2472.

[10] R. Brylinski and B. Kostant, Minimal rperesentations, geometric quantization, and unitarity. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **91**(1994), 6026 – 6029.

[11] R. Brylinski and B. Kostant, Differential operators on conical Lagrangean manifolds. In *J.-L. Brylinski et al. (eds.), Lie Theory and Geometry – In Honor of Bertram Kostant, PM 123, Birkhäuser, 1994*, pp. 65 – 96.

[12] R. Brylinski and B. Kostant, Lagrangian models of minimal representations of E_6, E_7 and E_8. In "*Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1*", PM 131, Birkhäuser, 1995, pp. 13 – 63.

[13] D. Kazhdan, The minimal representation of D_4. In "*Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory* (A. Connes et al. (eds.))", PM **92**, Birkhäuser, 1990, pp. 125 – 158.

[14] D. Kazhdan and G. Savin, The smallest representation of simply laced groups. *Israel Math. Conf. Proceedings*, **2**(1990), 209 – 223.

[15] J.-S. Huang, Minimal representations, shared orbits, and dual pair correspondence. IMRN, 6 (1995), 309 – 323.

[16] T. Uzawa, Introduction to minimal representations. in "第 4 回 整数論サマースクール報告集 「Weil 表現入門」", 1996, pp. 128 – 150.

[17] P. Torasso, Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle, [The Kirillov-Duflo orbit method and minimal representations of simple groups over a local field of characteristic zero] Duke Math. J. **90** (1997), no. 2, 261–377.

- 原始イデアルと巾零軌道

[18] A. Joseph, The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal. *Ann. Sci. E.N.S.*, **9**(1976), 1 – 30.

[19] A. Joseph, Minimal realizations and spectrum generating algebras. Comm. Math. Phys., 36 (1974), 325 – 338.

[20] R. Brylinski and B. Kostant, Nilpotent orbits, normality, and Hamiltonian group actions. *Journal AMS*, **7**(1994), 269 – 298.

[21] T. Levasseur and S. P. Smith, Primitive ideals and nilpotent orbits in type G_2. J. Alg., 114 (1988), 81 – 105.

[22] J. Sekiguchi, Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 127 – 138.

[23] T. Ohta, The singularities of the closures of nilpotent orbits in certain symmetric pairs. Tôhoku Math. J., 38 (1986), 441 – 468.

[24] T. Ohta, Classification of admissible nilpotent orbits in the classical real Lie algebras, J. Alg., 136 (1991), 290 – 333.

[25] W. Borho, A survey on enveloping algebras of semisimple Lie algebras. I. In "*Lie algebras and related topics* (Windsor, Ont., 1984)", CMS Conf. Proc., 5, AMS, 1986. pp. 19–50.

[26] W. Borho, J.-L. Brylinski and R. MacPherson, *Nilpotent Orbits, Primitive Ideals, and Characteristic Classes. A Geometric Perspective in Ring Theory.* Progress in Mathematics 78. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 1989.

[27] A. Joseph, Orbital varieties, Goldie rank polynomials, and unitary highest weight modules. in "*Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory* (B. Ørsted and H. Schrichtkrull (eds.))", Perspectives in Math. 17, Academic Press, 1997, pp. 53 – 98.

[28] J. E. Humphreys, *Conjugacy Classes in Semisimple Algebraic Groups.* Math. Surveys and Monographs 43, AMS, 1995.

- 半単純群の表現、随伴多様体など一般的な話題

[29] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings. Amer. J. Math., 86 (1963), 327 – 402.

[30] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces. Amer. J. Math., 93 (1971), 753 – 809.

[31] D. A. Vogan, The orbit method and primitive ideals for semisimple Lie algebras. in "*Lie Algebras and Related Topics* (D. Britten, F. Lemire and R. Moody (eds.))", CMS Conference Proceedings 5, AMS, 1986, pp. – .

[32] D. A. Vogan, Noncommutative algebras and unitary representations. in "*The Mathematical Heritage of Hermann Weyl* (R. O. Wells, Jr. (ed.))", Proceedings of Symposia in Pure Math. 48, AMS, 1988, pp. – .

[33] D. A. Vogan, Associated varieties and unipotent representations. in "*Harmonic Analysis on Reductive Groups* (W. Barker and P. Sally (eds.))", Progress in Math. 101, Birkhäuser, 1991, pp. 315 – 388.

[34] D. A. Vogan, The orbit method and unitary representations for reductive Lie groups. in "*Algebraic and Analytic Methods in Representation Theory* (B. Ørsted and H. Schrichtkrull (eds.))", Perspectives in Math. 17, Academic Press, 1997, pp. 243 – 339.

[35] A. Gyoja and H. Yamashita, Associated variety, Kostant-Sekiguchi correspondence, and locally free $U(\mathfrak{n})$-action on Harish-Chandra modules. To appear in J. Math. Soc. Japan, **51** (1999).

[36] H. Ozeki and M. Wakimoto, On polarizations of certain homogeneous spaces, Hiroshima Math. J., **2**(1972), 445 – 482.

[37] E. B. Vinberg and V. L. Popov, On a class of quasihomogeneous affine varieties. Math. USSR Izvestja, 6 (1972), 743 – 758.

[38] R. Steinberg, A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galis field. Trans. AMS, 71 (1951), 274 – 282.

[39] W. M. Beynon and G. Lusztig, Some numerical results on the characters of exceptional Weyl groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **84**(1978), 417 – 426.

[40] B. Kostant and S. Sahi, The Capelli identity, tube domains, and the generalized Laplace transform. Adv. Math., 87 (1991), 71 – 92.

[41] B. N. Allison and J. R. Faulkner, A Cayley-Dickson process for a class of structurable algebras. Trans. AMS, 283 (1984), 185 – 210.

[42] 松本久義, Enveloping Algebra 入門. 東京大学数理科学セミナリーノート 11, 1995, Graduate School of Mathematica Science, University of Tokyo.

[43] Frank D. Grosshans, *Algebraic Homogeneous Spaces and Invariant Theory*. LNM **1673**, Springer-Verlag 1977.

[44] Armand Borel, *Linear Algebraic Groups (Second Enlarged Edition)*. GTM **126**, Springer-Verlag 1991.

[45] 辰馬伸彦, 位相群の双対定理, 紀伊國屋数学叢書 32, 紀伊國屋 1994.

[46] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*. Van Nostrand Reinhold 1993.

[47] Nolan R. Wallach, *Real Reductive Groups I*. Pure and Appl. Math. **132**, Academic Press 1988.

[48] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Second printing, revised. Springer, New York, 1978 ISBN: 0-387-90053-5.

[49] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990 ISBN: 0-521-37510-X

[50] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978 ISBN: 0-12-338460-5.

[51] 堀田良之、環と体 1、岩波講座現代数学の基礎 15、岩波書店、1997.

- 後からの追加分

[52] D. Barbasch and D. A. Vogan, Jr., Unipotent representations of complex semisimple groups, Ann. of Math. (2) **121** (1985), no. 1, 41–110.

[53] D. Barbasch and D. Vogan, Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups, J. Algebra **80** (1983), no. 2, 350–382.

[54] D. Barbasch and D. Vogan, Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups, Math. Ann. **259** (1982), no. 2, 153–199.

[55] D. Barbasch and D. A. Vogan, Jr., The local structure of characters, J. Funct. Anal. **37** (1980), no. 1, 27–55.

[56] R. Howe, Wave front sets of representations of Lie groups, in *Automorphic forms, representation theory and arithmetic (Bombay, 1979)*, 117–140, Tata Inst. Fundamental Res., Bombay, Bombay, 1981.

[57] J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Progr. Math., 130, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996 ISBN: 0-8176-3821-0

[58] W. Rossmann, Characters as contour integrals, in *Lie group representations, III (College Park, Md., 1982/1983)*, 375–388, Lecture Notes in Math., 1077, Springer, Berlin, 1984.

[59] W. Rossmann, Picard-Lefschetz theory and characters of a semisimple Lie group, Invent. Math. **121** (1995), no. 3, 579–611.

[60] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines*, Actualites Scientifiques et Industrielles, No. 1337 Hermann, Paris, 1968.

[61] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 10 Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, New York, 1962.

[62] N. R. Wallach, C^{∞} vectors, in *Representations of Lie groups and quantum groups (Trento, 1993)*, 205–270, Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.

[63] T. A. Springer, Linear algebraic groups. in *Algebraic geometry. IV*, A translation of Algebraic geometry. 4 (Russian), Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 55. Springer, Berlin, 1994 ISBN: 3-540-54682-0.

[64] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Second edition, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[65] V. L. Popopov and E. B. Vinberg, Invariant theory. in *Algebraic geometry. IV*, A translation of Algebraic geometry. 4 (Russian), Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 55. Springer, Berlin, 1994 ISBN: 3-540-54682-0.

[66] J. Dixmier, Enveloping algebras. North-Holland Mathematical Library, Vol. 14. Translated from the French. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. ISBN: 0-7204-0430-4

[67] A. Joseph, A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra, J. Algebra **48** (1977), no. 2, 241–289.

[68] Devra Garfinkle, A new constraction of the Joseph ideal, MIT Doctorial Thesis, 1982.

[69] M. Kashiwara and M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, *Invent. Math.*, **44**(1978), 1 – 47.

[70] P. Torasso, Sur le caractère de la représentation de Shale-Weil de $\mathrm{Mp}(n, \mathbf{R})$ et $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$, Math. Ann. **252** (1980), no. 1, 53–86.

[71] R. Howe, On some results of Strichartz and of Rallis and Schiffman (ママ), *J. Funct. Anal.*, **32**(1979), 297 – 303.

[72] R. Howe, Dual pairs in physics: Harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons, in *Applications of Group Theory in Physics and Mathematical Physics*, Lectures in Applied Mathematics vol. 21, AMS, 1985, pp. 179 – 207.

[73] R. Howe, Small unitary representations of classical groups, in *Group representations, ergodic theory, operator algebras, and mathematical physics*, MSRI Publications vol. 6, Springer-Verlag, 1987, pp. 121 – 150.

[74] R. Howe, Remarks on classical invariant theory, *Trans. AMS*, **313**(1989), 539 – 570.

[75] R. Howe, Transcending classical invariant theory, *Journ. AMS*, **2**(1989), 535 – 552.

[76] R. Howe, Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity free actions and beyond, in *The Schur Lectures (1992)*, Israel Mathematical Conference Proceedings **8**, Bar-Ilan Univ., 1995, pp. 1 – 182.

[77] R. Howe and E. C. Tan, *Non-Abelian Harmonic Analysis, Applications of $SL(2, \mathbb{R})$*, Universitext, Springer-Verlag, 1992.

[78] J. Harris, *Algebraic geometry*, A first course. Corrected reprint of the 1992 original, Springer, New York, 1995.

[79] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, A first course. Readings in Mathematics. Springer, New York, 1991.

[80] W. Schmid and K. Vilonen, Characteristic cycles and wave front cycles of representations of reductive groups, to appear in Annals of Math.

[81] M. Vergne, Instantons et correspondance de Kostant-Sekiguchi, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), no. 8, 901–906.

[82] K. Nishiyama, H. Ochiai and K. Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules — Hermitian symmetric case —. Preprint, 1999. [available at `http://w3rep.math.h.kyoto-u.ac.jp/papere.html#NOT`]

[83] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions. Vol. 2*, Class I representations, special functions, and integral transforms. Translated from the Russian by V. A. Groza and A. A. Groza, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

[84] 岡本清郷、フーリエ解析の展望、すうがくぶっくす 17、朝倉書店.

[85] W. Lichtenstein, A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector. Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), no. 4, 605–608.

[86] Hajime Kaji, Masahiro Ohno, and Osami Yasukura, Adjoint varieties and their secant varieties. Indag. Math. (N.S.) 10 (1999), no. 1, 45–57.